В.Х. Хаханян

Об онтологии математики: в каком смысле можно дать обоснование математике*

1. К истории вопроса

А. Три кризиса в основаниях математики.

Заметим сразу, число три носит условный характер, ибо в своём развитии математика (в лице её представителей) не раз сталкивалась с ситуацией, которая требовала принятия новых объектов или разъяснения новых, кажущихся парадоксальными, результатов. Исторически первым является открытие несоизмеримых отрезков и, тем самым, появление нового класса чисел – иррациональных. Открытие понятия несоизмеримости и сформулированные ранее Зеноном Элейским апории поставили перед математиками и философами того времени совершенно новый вопрос о возможности математики как точной науки, что и дало основание говорить о кризисе греческой математики (см. [1], с. 58–60).

Другой заметный кризис, приведший к новым математическим и философским взглядам в математике, заключён в истории о попытках доказать независимость пятого постулата в аксиоматике геометрии Евклида. Безуспешность этих попыток привела математиков не только к открытию новых геометрических систем, но и (в итоге) к вопросу о том, что представляет собой с точки зрения геометрии реальное пространство Вселенной. Гаусс, Лобачевский и Бойаи сделали первый, но не понятый ещё полностью тогда **НИКЕМ** (время ещё не пришло!), шаг к полной формализации той

* Заметки из доклада на Московском семинаре по философии математики 19 октября 2007 г.

или иной ветви математической науки; шаг, который бы дал возможность не только доказывать, что что-то существует, но уметь также обосновывать, что чего-то **НЕ** существует. Заметим, что полная формализация была сделана впервые Д.Гильбертом в 1899 г. опять же для геометрии Евклида и затем позднее предложена им же в качестве существенной составляющей программы обоснования всей математики. Программа обоснования математики стала необходимой после того, как в учении Г.Кантора о множествах («наивная» теория множеств) обнаружились противоречия (это был третий кризис, и самый мощный в математике, ибо он затрагивал основания математики (противоречие, обнаруженное Б.Расселом в 1902-м г., и не только оно; см. также ниже). Не описывая в деталях сложившуюся ситуацию, заметим только, что было предложено значительное число выходов из создавшегося положения, но, к сожалению, не удалось сохранить (**ДА ЭТО И НЕВОЗМОЖНО**) первоначальный вариант учения Г.Кантора о множествах. Системы аксиоматической теории множеств Б.Рассела – А.Уайтхеда (система типовой теории множеств TT), бестиповые системы Цермело (Z), Цермело–Френкеля (ZF), Куайна (NF) и ряд других, (которые не получили столь широкой известности, как перечисленные, см. А.Френкель, И.Бар-Хиллел, «Основания теории множеств»), а также новые философские установки по обоснованию математики Б.Рассела и Г.Фреге (логицизм), Л.Брауэра (интуиционизм, или, точнее, неоинтуиционизм), Д.Гильберта (формализм и финитизм), конструктивное направление А.А.Маркова-младшего, Е.Бишопа и ряда других математиков, а также современные взгляды на возможное обоснование математики некоторых математиков и философов, не приводят нас к желаемому, приемлемому всеми, выходу из новейшего кризиса в основаниях математики.

Б. Две тенденции в развитии математики.

Учитывая вышесказанное, отметим две важные тенденции в развитии математики, которые заметной линией проходят через всю историю последней. Во-первых, это стремление к аксиоматическому изложению той или иной ветви математической науки, которое ведёт своё начало от геометрической аксиоматики Евклида, получает новый толчок с появлением неевклидовой геометрии Лобачевского-Бойаи, постепенно такое изложение приобретает всё большую формализованность и достигает современного состояния у Д.Гильберта (также в геометрии!) и в трудах К.Гёделя и ряда других современных математиков. Оставим в стороне вопрос о том, почему именно в геометрии, – это не случайно и связано с отношением этой науки к внешней действительности, и отметим вторую важную тенденцию. Это постоянное противоборство (особенно заметное за последние два века) между двумя видами бесконечности, а именно актуальной (один из самых ярких представителей – Г.Кантор) и потенциальной (тут в качестве такого представителя можно назвать А.А.Маркова-младшего). Именно в связи с принятием и развитием Г.Кантором неограниченной абстракции актуальной бесконечности в созданной им «наивной» теории множеств (учении о множествах) и возникали противоречия. Отметим два наиболее известных и понятных противоречия. В теории множеств (при неограниченном понимании понятия «множество») противоречивым является существование: во-первых, множества всех множеств (противоречие с тем фактом, что мощность множества подмножеств данного множества строго больше мощности исходного множества (теорема Г.Кантора, который сам и открыл это противоречие)) и, во-вторых, существование множества всех множеств, не являющихся элементами самих себя (автор – Б.Рассел, опубликовавший это противоречие в письме к Г.Фреге в 1902 г.). Казалось бы, что стоит вопрос об отказе от актуальной бесконечности, но ситуация не так проста. Если мы примем потенциальную бесконечность (или, что является ещё более сильным предположением, существование очень больших и, тем самым, практически не достижимых чисел (такое положение фактически имеет место в современных криптографии, дискретной математике и в ряде других наук, в широкой степени опирающихся на «конечную» математику, но не требующих обращения к полной абстракции потенциальной бесконечности)), то мы не сможем, не добавляя какие-либо «естественно-приемлемые» дополнительные принципы, например тезис Чёрча и принцип Маркова в традиционном конструктивизме А.А.Маркова-младшего, см. [2], получить начальные фрагменты математического анализа и тех математических дисциплин, которые используют результаты и следствия из математического анализа так, как это делается с помощью даже не самых сильных вариантов аксиом, базирующихся на понятии актуальной бесконечности. Именно с такими трудностями сталкиваются интуиционисты и конструктивисты любого направления, принимающие ту или иную трактовку понятия потенциальной бесконечности.

В. Формализм и финитизм Д.Гильберта.

Возможный, и многообещающий, выход из создавшего на рубеже XIX–XX вв. положения в основаниях математики был предложен выдающимся немецким математиком того времени Д.Гильбертом. Его концепция доказательства непротиворечивости математики заключалась в первоначальном разделении всех объектов в математике на реальные (действительные) и идеальные. Не выбрасывая последних, Д.Гильберт предложил, во-первых, полностью формализовать математику (фактически арифметику или теорию натуральных чисел, т.к. к тому времени стало ясно, что все остальные разделы математической науки можно (в смысле построения моделей и доказательства непротиворечивости) свести к арифметике (арифметизация всей математики)). Имея теперь дело с полностью формализованной арифметикой и, тем самым, с синтаксическими объектами, можно попытаться доказать непротиворечивость полученного исчисления арифметики, т.е. невыводимость некоторого синтаксического объекта (предложения), семантически выражающего в построенном формализме непротиворечивость арифметики. При этом, как и полагается, все выводимые в предложенном формализме предложения (теоремы формализма) должны быть истинны в некоторой естественной семантике, например, на понимаемой привычным образом структуре натурального ряда. Используемые при этом внешним образом математические средства (Д.Гильберт не дал их точного описания!) признавались всеми математиками (так называемый финитизм или финитная точка зрения). Однако оказалось, что существуют **истинные и невыводимые** предложения формализма (**при условии непротиворечивости последнего**) и, как следствие этого факта, была установлена **ПРИНЦИПИАЛЬНАЯ НЕВОЗМОЖНОСТЬ** доказать непротиворечивость арифметического формализма средствами данного формализма (вторая теорема К.Гёделя). Анализ доказательства второй теоремы показал, что результат остаётся верным и для несколько более слабых систем, не говоря уже о сильных аксиоматических системах, формализующих математический анализ или теорию множеств. Отметим, что до сих пор не удалось построить мало-мальски содержательную аксиоматическую теорию, в которой можно было бы доказать её собственную непротиворечивость. Таким образом, хотя программа выхода из создавшегося третьего кризиса, предложенная Д.Гильбертом, и сыграла значительную роль в истории математики (главным образом, в математической логике), основная цель её создания достигнута не была.

2. Ещё один из возможных подходов к обоснованию математики (теории множеств)

А. Современное состояние оснований математики (теории множеств).

Итак, положение дел в теории множеств можно охарактеризовать следующим образом. Совершенно ясно, что возврат к «наивному» варианту теории множеств невозможен при современном понимании вопросов непротиворечивости. С другой стороны, исчерпаны, казалось бы, все возможные разумные выходы из создавшегося положения, но они не могут быть приняты всеми безоговорочно математиками и философами, работающими в основаниях теории множеств. В упомянутой выше книге А.Френкеля и И.Бар-Хиллела (крупнейших специалистов в области оснований математики) мы читаем (с. 416): «Во взглядах на то, каким образом можно было бы достигнуть удовлетворительного обоснования, все ещё имеется большое расхождение и громадное количество возникающих в этой связи проблем ещё далеко не решено. И все же подавляющее большинство математиков отказывается считать, что идеи Кантора были всего лишь болезненным бредом. Несмотря на то, что основания теории множеств все еще довольно шатки, эти математики продолжают с успехом применять понятия, методы и результаты теории множеств в большей части разделов анализа и геометрии, и даже отчасти в арифметике и алгебре, твердо веря, что работы по обоснованию теории множеств приведут в конце концов к реабилитации теории множеств в полном (или по крайней мере **почти** полном) её классическом объеме. Эта позиция отнюдь не исключает готовности интерпретировать теорию множеств совсем не так, как это обычно делается, что соответствует, очевидно, существующей потребности в пересмотре интерпретации логики и математики вообще». Первая часть этого вывода «…к реабилитации теории множеств в полном (или по крайней мере **почти** полном) ее классическом объеме…» кажется излишне оптимистичной, так же как и возможность полного пересмотра интерпретации логики и математики, т.к. никаких удачных идей такого пересмотра (и направлений) пока даже не просматривается. Тем не менее уже нашло себе место направление (ниже будет приведён пример для теории множеств), заключающееся в более или менее локальной формализации той или иной части (раздела) математики и изучении с определённой метаматематической и философской точки зрения этой части (раздела), причём последняя (метаматематика) является более или менее делом привычки и вкуса взглядов того или иного исследователя. Взаимоотношение различных метаматематических разделов также может изучаться с формальной точки зрения (т.е. возникает метаматематика формализованных систем метаматематик).

Стоит отметить, что собственно «…проблема устранения парадоксов (лучше сказать – противоречий. – *В.Х.*) поглощается более широкой проблемой обоснования математики и логики. Какова природа математической истины? Какой смысл имеют математические предложения и на какого рода доказательствах они основаны? С этой широкой проблемой или комплексом проблем философия имеет дело (и будет иметь дело всегда по мере развития наших представлений о природе математического знания. – *В.Х.*) независимо от того, что в окраинных областях математики появились парадоксы (противоречия. – *В.Х.*)», см. [3], с. 44. Ниже и будет сделана попытка также предложить некий выход для обоснования теории множеств и, сначала, для примера, арифметики (несмотря на кажущуюся простоту последней и готовность практически всех математиков верить в непротиворечивость некоторого расширения арифметики, доказательство непротиворечивости самой арифметики может быть дано в рамках этого расширения при указанном факте веры). Используя это положение, можно применить его для арифметики с подлежащей интуиционистской логикой, именуемой арифметикой Гейтинга HA. Именно для интуиционистских систем, чьё обоснование почему-то в начале века вызывало меньше сомнений, чем систем классических (см, например [6], с.35, курсив вверху и [7]).

Б. Базисный вариант для НА.

Это стандартная аксиоматическая арифметика Пеано, но в этой системе схем аксиом которой отсутствует закон снятия двойного отрицания, так широко используемый в математических доказательствах. Рассмотрим некоторые дополнительные принципы, о которых неявно шла речь, при упоминании философских исходных принципов Брауэра и Маркова-младшего (далее пишем просто «Марков»).

CT – формальный тезис Чёрча с выбором: $\forall x\exists y A(x,y)\to \exists e\forall x\exists y(\{e\}(x)=y\wedge A(x,y))$. Приведённая запись, конечно, не является полностью формализованной в языке арифметики и требует пояснения. Предположим, что по всякому натуральному числу x может быть найдено натуральное число y (может быть, не одно!) так, что выполняется отношение $A(x,y)$. Тогда тезис утверждает, что найдётся рекурсивная функция f из натуральных чисел в натуральные числа (её гёделев номер есть e), такая, что если $f(x)=y$ (здесь происходит выбор одного из сущих y-ов), то выполняется отношение $A(x,y)$.

CT! – формальный тезис Чёрча с единственностью в посылке: $\forall x\exists! y\varphi(x,y)\to\exists e\forall x\exists y(\{e\}(x)=y\wedge\varphi(x,y))$, где запись $\exists! x\varphi(x)$ есть сокращение для формулы $\exists x(\varphi(x)\wedge\forall y(\varphi(y)\to x=y))$.

Нетрудно видеть, что уже теория **HA + CT!** противоречит классической математике, см. [4], с. 49. Также нетрудно доказать (снова см. [4]), что формула $\forall x\neg\neg\varphi(x)\to\neg\neg\forall x\varphi(x)$ не выводится в **IPC**. **В HA + CT!** даже выводятся одновременно формулы $\neg\forall x\exists y\varphi(x,y)$ и $\forall x\neg\neg\exists y\varphi(x,y)$ для некоторой формулы φ.

Таким образом, теория **HA + CT!** сильно отличается от классической арифметики Пеано и требует новой интерпретации, которая должна быть неклассической. Такой интерпретационной моделью служит рекурсивная реализуемость по Клини. Определяется понятие «натуральное число n реализует формулу арифметики φ», причем это определение может быть дано как на содержательном, так и на формализованном уровнях (т.е. как формула теории **HA**). Имеет место факт: если в **HA + CT!** выводима формула φ, то тогда найдётся (эффективно по построению формулы φ) число n такое, что «n реализует φ». Точное определение и доказательство этого факта имеется в [4]. Таким образом ,**HA + CT!** непротиворечива относительно **HA**, которая, конечно, является подтеорией арифметики Пеано (обозначим её **PA**). Далее, теории **HA + CT** и **HA + CT!** обладают свойствами дизъюнктивности и экзистенциальности, т.е. если в **HA + CT** выводится $\varphi\vee\psi$ для замкнутых формул φ и ψ, то в **HA+CT** выводится φ или в **HA+CT** выводится ψ и соответствующая формула может быть точно указана; если в **HA+CT** выводится замкнутая формула $\exists\mathbf{x}\varphi(\mathbf{x})$, то найдется натурал n (т.е. терм языка арифметики, изображающий в **HA+CT** натуральное число **n**) такой, что в **HA+CT** выводима формула $\varphi(\mathrm{n})$. Аналогично и для теории **HA+CT!** Наличие свойств дизъюнктивности и экзистенциальности указывает на существенно интуиционистский (эффективный!) характер теорий **HA+CT** и **HA+CT!**. Исходная теория **HA** также обладает отмеченными свойствами эффективности логических связок.

Рассмотрим теперь два варианта принципа конструктивного подбора (принципа А.А.Маркова) и некоторый принцип **P**, как альтернативный к первым двум. Вот точные формулировки.

$\mathbf{M}^{+}$ (сильный ленинградский принцип или принцип конструктивного подбора): $\forall\mathbf{x}(\varphi(\mathbf{x})\vee\neg\varphi(\mathbf{x}))\wedge\neg\neg\exists\mathbf{x}\varphi(\mathbf{x})\rightarrow\exists\mathbf{x}\varphi(\mathbf{x})$.

Дадим неформальный комментарий в пользу приемлемости этого принципа. Мы шаг за шагом проверяем истинность свойства $\varphi(\mathbf{x})$ для натуральных **x** (это возможно в силу первого члена посылки). Этот процесс не может продолжаться неограниченно в силу второго конъюнктивного члена, и это главный момент рассуждения! Но тогда на некотором шаге найдётся такое **x**, что будет выполнено $\varphi(\mathbf{x})$. Ослаблением $\mathbf{M}^{+}$ является $\mathbf{M}^{-}$: $\neg\neg\exists\mathbf{x}\varphi(\mathbf{x})\rightarrow\exists\mathbf{x}\varphi(\mathbf{x})$. Здесь φ – бескванторная (или разрешимая) формула.

Рассмотрим ещё принцип **P**, который имеет вид: $(\neg\psi\rightarrow\exists\mathbf{y}\varphi(\mathbf{y}))\rightarrow\exists\mathbf{y}(\neg\psi\rightarrow\varphi(\mathbf{y}))$, где формула ψ не содержит переменную **y** свободно. Здесь мы впервые сталкиваемся с ситуацией, когда для конструктивного обоснования берутся не все вычислимые функции, а только функции из заранее заданного семейства. Принцип **P** выражает некоторую узкоконструктивную точку зрения и противоречит $\mathbf{M}^{-}$, т.е. аксиоматическая теория **HA + CT +** $\mathbf{M}^{-}$ **+ P** – противоречивая теория. Однако теория **HA+CT+P** равнонепротиворечива с арифметикой **HA** (см. с. 62 из [4]).

Сделаем теперь некоторые философские выводы, основывающиеся на представленных математических результатах:

1. Теория **НА** является базисной теорией: в неё верят как «классик» (классическая теория чисел **РА** содержит в себе **НА** в явном виде), так и конструктивист (конструктивизм А.А.Маркова может быть формализован целиком в теории **НА + СТ+ М$^-$)**. В **НА** верит также и антитрадиционный конструктивист, чьи взгляды описываются какой-либо семантикой теории **НА + СТ + Р,** а также и исследователь, придерживающийся семантических взглядов на арифметику как реализуемость (ещё одно расширение **НА**, которое мы здесь не приводим).

2. Различные расширения **НА**, описанные выше, являются равнонепротиворечивыми (т.е. относительно непротиворечивы). Как известно, решить вопрос об абсолютной непротиворечивости любой из этих арифметических теорий в рамках этой же теории (и, следовательно, и любой другой из представленных), не представляется возможным (вторая теорема Гёделя). Поэтому произносимая иногда фраза «**НА** (или **РА** или ещё какая-либо из этих теорий) непротиворечива» просто неверна.

3. В результате описанного выше исследования разных расширений **НА** мы видим, что все расширения арифметики ничем не лучше одно какого-либо другого (с точки зрения непротиворечивости) и «проповедование» взгляда, что «существует единственно правильная арифметика», просто лишено смысла до тех пор, пока мы не приведем каких-либо дополнительных доводов в пользу этой самой «правильной» арифметики или не уточним смысл термина «правильный».

4. Ценность в такого рода исследованиях представляет именно вопрос о взаимоотношениях различных теорий, сводящийся, как правило, к вопросу получения самых разнообразных (по уровню эффективности (при исследованиях **НА** и её расширений последнее имеет место в довольно грубой форме, и ситуация изменяется при переходе к более высоким теориям, например, интуиционистскому анализу)) моделей для **НА**. Например, можно доказать, что в **НА** не имеет места принцип наименьшего элемента, классически, конечно, верный.

В заключение пункта Б. отметим, что все результаты, которые приведены здесь для **НА** и её расширений, могут быть «подняты» на уровень бестиповой теории множеств типа Цермело-Френкеля с подлежащей интуиционистской логикой **ZFI**. Какие именно из результатов можно «поднять» и точные математический и философский смысл их для теории множеств мы опишем ниже, однако отметим, что генеральная линия подхода по созданию базисной теории будет сохранена.

В. Базисный вариант аксиоматической теории множеств $\mathbf{ZFI_R}$ + **DCS**.

К дополнительным принципам, которые **НЕ** входят в базисный вариант теории множеств с интуиционистской логикой, относятся оба вида тезиса Чёрча, описанные выше и имеющие прежний вид, т.к. для простоты записи можно считать, что язык теории $\mathbf{ZFI_R}$ + **DCS** содержит два сорта переменных: по натуральным числам и по множествам. Однако в соответствующей формуле могут присутствовать параметры по любым сортам переменных! Эти же замечания относятся и к слабому и сильному принципам Маркова.

UP (принцип униформизации). Этот принцип впервые появляется в одной из работ А.Трулстры по арифметике второго порядка с сортами переменных по натуральным числам и по множествам натуральных чисел. В языке нашей теории он имеет вид:

UP (или **U**) $\forall x \exists n \varphi(x,n) \rightarrow \exists n \forall x \varphi(x, n)$,

где **x** – переменная по множествам, **n** – по натуральным числам; формула φ может содержать параметры любого сорта. Этот принцип противоречит классической теории множеств, т.к. утверждает, что если для всякого множества **x** (не натурального числа!) найдётся натуральное число **n** так, что выполняется соотношение $\varphi(x,n)$ (напомним, что φ может содержать и другие параметры), то найдётся единое для всех множеств **x** такое натуральное число **n**, что будет выполнено $\varphi(x,n)$. Принцип **UP** «говорит», что множества, с интуиционистской точки зрения понимаемые как свойства («виды»), которые присущи математическим объектам, носят расплывчатый, нечёткий характер. Натуральные числа, конечно же (как и в **НА**), – конструктивные объекты. Слабый вариант принципа униформизации **UP!** содержит в посылке принципа требование существования единственного **n**, т.е. выбор отсутствует.

Наконец, частный вид аксиомы выбора:

ACNN: $\forall m \exists n \varphi(m,n) \rightarrow \exists z(z$ – функция из $N \rightarrow N) \forall m\, \varphi\, (m, z(m))$.

Неформально: если для всякого натурального числа **m** найдётся натуральное число **n** так, что выполнено φ, то найдётся функция из натуральных чисел в натуральные числа, которая по всякому **m** выдаёт требуемое **n** (здесь осуществляется выбор единого **n**, а т.к. интуиционистски принцип наименьшего не верен, то схемы принципов без единственности всегда сильнее принципов с единственностью; ниже будут приведены соответствующие математические результаты).

Рассмотрим ещё один, классически верный, принцип, который мы добавим в базисный вариант теории множеств – принцип двойного дополнения множеств **DCS**: $\forall a \exists x \forall y (y \in x \leftrightarrow \neg\neg x \in a)$, который записан здесь, для краткости, также в односортном языке теории множеств и утверждает, что для каждого множества существует множество его «не-не» элементов. Получаемую теорию (это и есть базисный вариант!) $\mathbf{ZFI_R}$ + **DCS** обозначим, для краткости, **БВ**.

Сделаем одно замечание, связанное с индексом **R** в обозначении $\mathbf{ZFI_R}$. Схема аксиом подстановки из классического варианта теории множеств **ZF** Цермело-Френкеля в интуиционистской логике распадается (в силу нарушения закона существования наименьшего элемента) на схему «подстановки» и схему «собирания», которые не эквивалентны в интуиционизме. Приведём запись этих схем аксиом в языке с одним сортом переменных – по множествам.

Собирание (collection): $\forall x \in a \exists y \varphi(x,y) \to \exists B \forall x \in a \exists y \in B \varphi(x,y)$; здесь, как всегда, происходит выбор одного из сущих **y**, а это интуиционистски сильнее, т.к. принцип наименьшего элемента интуиционистски ложен.

Подстановка (replacement): $\forall x \in a \exists ! y \varphi(x,y) \to \exists B \forall x \in a \exists y \in B \varphi(x,y)$. Базисный вариант **БВ** включает именно схему «подстановки», но не схему «собирания».

Г. Приведём очень краткую сводку результатов для базисного варианта теории **БВ**, с учётом замечания, сделанного в разделе об интуиционистской арифметике про теорию множеств (о «поднятии» результатов на уровень теории множеств). Это достаточно сильный вариант, т.к. теория **ZF** равнонепротиворечива с ним. **БВ** допускает различного рода расширения, связанные не только с приведёнными выше принципами, но и с хорошо известными принципами интуиционистского анализа, см. [4] (в этом случае технически проще рассматривать систему с тремя сортами переменных (добавляется сорт переменных или для функций из натуральных чисел в натуральные, или сорт для множеств натуральных чисел («специй»))). Полную сводку имеющихся результатов (полученных не только автором, но в литературе за последние 35 лет) можно найти в [5] (ниже будет дан список основных результатов автора из [5]). Итак, для теории **БВ** были:

исследованы свойства класса ординалов в теории множеств с интуиционистской логикой; дано интуиционистское доказательство совместности тезиса Чёрча с выбором с теорией множеств **БВ**;

исследованы соотношения ряда дополнительных постулатов интуиционистского, конструктивного и теоретико-множественного характера в базисном варианте теории множеств с интуиционистской логикой **БВ**; доказана независимость сильного принципа униформизации от тезиса Чёрча с выбором в теории множеств **БВ** без аксиомы объёмности;

доказана независимость схемы собирания от принципа двойного дополнения множеств и обратно в теории множеств с подлежащей интуиционистской логикой;

доказана допустимость правила Маркова с параметрами только по множествам в рассматриваемом варианте теории множеств; построены обобщённые модели типа предикатов реализуемости для теории множеств;

исследован ограниченный вариант аксиомы выбора в форме $\mathbf{AC}_{\omega}$ на вопрос его совместности и независимости с теорией множеств с интуиционистской логикой **БВ**;

предложен интуиционистский вариант для классической теории множеств Куайна и доказана непротиворечивость классической теории **NF** относительно этого варианта; построен класс функциональных алгебраических моделей для интуиционистской теории множеств с принципом двойного дополнения множеств и доказана теорема о корректности для этого класса моделей;

доказано, что штрих-реализуемость Клини не является функциональной алгебраической моделью для арифметики **HA**.

Как уже отмечалось, более полную сводку имеющихся результатов и методов их доказательства можно найти в [5], но нужно отметить, что совсем недавно автором получено усиление результата о невыводимости из теории **БВ – аксиома объёмности + тезис Чёрча** схемы **сильного принципа униформизации** (см. выше). Усиление состоит в том, что результат остаётся верным и в присутствии **аксиомы объёмности**.

3. Некоторые выводы: какое же обоснование предлагается

Итак, с одной стороны, возврат к канторовскому («наивному») варианту теории множеств невозможен. С другой стороны, ясно, что пока нет (и, на наш взгляд, и **не может быть**) такого выхода из создавшегося положения, который бы устроил всех (хотя бы потому, что нет никакой возможности доказать непротиворечивость не только теории множеств (читай: всей математики), но и даже маломальски содержательной аксиоматической теории). Что же можно предпринять в такой ситуации? Кажется естественным обратиться к таким математическим принципам, которые не вызывают сильных сомнений ни со стороны математиков, ни со стороны философов-математиков. Похожая ситуация как раз проповедовалась самим Д.Гильбертом, и спор состоял только в том, какие именно принципы и методы, используемые в математике, можно считать финитными (читай: надёжными). Именно такого рода подход, но только в формализованном и достаточно эффективном (неклассическом) аксиоматическом варианте, и предлагается в данном сообщении. Конкретно: **вся внешняя метаматематика должна укладываться в рамки аксиоматической системы БВ**. Последняя не является чем-то застывшим и может расширяться (или сужаться) в зависимости от получаемых в математике (в первую очередь, в теории множеств с интуиционистской логикой) результатов и положений.

Литература

1. *Стройк Д.Я.* Краткий очерк истории математики. М.: Наука, 1999.

2. *Кушнер Б.А.* Лекции по конструктивному математическому анализу. М.: Наука, 1973.

3. *Клини С.К.* Введение в метаматематику. М.: Иностр. лит., 1957.

4. *Драгалин А.Г.* Математический интуиционизм. Введение в теорию доказательств. М.: Наука, Физ.-мат. лит., 1979.

5. *Хаханян В.Х.* Интуиционистская логика и теория множеств: Дис. … д-ра филос. наук. М., 2004.

6. *Колмогоров*. Юбилейное издание в 3-х книгах. Книга 1. Истина – благо. Биобиблиография. М.: Наука, Физ.-мат. лит., 2003. 384 с.