Философия науки и техники
2019. Т. 24. № 2. С. 70–81
УДК: 168+510

Philosophy of Science and Technology
2019, vol. 24, no. 2, pp. 70–81
DOI: 10.21146/2413-9084-2019-24-2-70-81

В.А. Шапошников

Революции в математике: возвращаясь к старому спору Часть 1

Шапошников Владислав Алексеевич – кандидат философских наук, доцент. Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова. Российская Федерация, 119991, ГСП-1, Москва, Ломоносовский проспект. д. 27, корп. 4; e-mail: shaposhnikov@philos.msu.ru

1970–1990-е гг. – особый период в истории философии математики. Именно тогда сформировалось влиятельное направление исследований, известное сегодня как «философия математической практики». Один из наиболее заметных эпизодов его становления был связан с так называемым спором о революциях в математике, спровоцированным вопросом о том, можно ли применить к математике концепцию развития науки Т. Куна. В статье представлен ретроспективный анализ этого спора, призванный ответить на вопрос о его результатах и последствиях для современной философии математики. Отправной точкой развернувшейся дискуссии стало противостояние М. Кроу, утверждавшего, что в математике никогда не происходит революций, и Дж. Даубена, стоящего на противоположной позиции. На основе разбора аргументов каждой из сторон в статье обосновывается вывод, согласно которому победа в споре номинально осталась за Даубеном, поскольку большинство его участников, в том числе и сам Кроу, в итоге признало, что революции в математике все-таки происходят. Однако в действительности это большинство солидаризировалось с исходной позицией Кроу, поскольку готово было признать наличие в истории математики только таких «революций», которые не нарушают кумулятивного характера накопления математических результатов, что плохо согласуется с исходным куновским пониманием научной революции. В противоположность тем работам, в которых утверждается, что спор о революциях в математике оказался безрезультатным, в данной статье его польза и поучительность связывается с обнаружением нескольких характерных интеллектуальных тенденций, требующих либо дальнейшего развития, либо осознанного противодействия, но в любом случае сохраняющих свою актуальность в контексте современной философии математической практики.

Ключевые слова: философия математики, философия математической практики, революции в математике, кумулятивность развития математики, Т. Кун

Спор Кроу и Даубена

В 1974 г. на фоне беспрецедентной популярности концепции научных революций Томаса Куна[1] между двумя американскими историками математики Майклом Кроу и Джозефом Даубеном возник спор о том, *происходят ли научные революции в математике*. Кроу утверждал, что не происходят, Даубен придерживался противоположной точки зрения. При разборе аргументов сторон оказалось, правда, что оппоненты по-разному понимали и что именно означает «в математике», и что такое «научная революция».

Кроу изначально хотел ограничить математику в собственном смысле только доказанными утверждениями и образуемыми из них теориями, а революцию трактовать как окончательный и бесповоротный отказ от принятых ранее доказанных утверждений или установленных теорий. Он пишет: «Необходимая черта всякой революции состоит в том, что некоторая существовавшая ранее сущность (будь то король, конституция или теория) должна быть свергнута, сброшена без возможности реставрации (some previously existing entity <…> must be overthrown and irrevocably discarded)» [Crowe, 1975, p. 165; Crowe, 1992a, p. 19]. Даубен называет это «принципом замещения (displacement principle)» [Dauben, 1984, p. 83; Dauben, 1992a, p. 52]. Кроу убежден, что с математическими теориями такого не происходит, будучи раз установленными и принятыми, они навсегда входят в состав математики. Поэтому он завершает свою статью, впервые обнародованную в августе 1974 г., опубликованную в 1975 г. и инициировавшую рассматриваемую полемику, формулировкой Закона 10: «Революции в математике никогда не происходят (Revolutions never occur in mathematics)». Однако тут же делает следующую оговорку: «Предлог “в” (внутри) является в Законе 10 ключевым, поскольку <…> революции могут происходить в математической терминологии, символике, метаматематике (например, метафизике математики), методологии (т. е. стандартах строгости) и, может быть, даже в историографии математики» [Crowe, 1975, p. 165–166; Crowe, 1992a, p. 19]. При таком (максимально узком) понимании развитие математики выглядит строго кумулятивным, ведь здесь никогда не отбрасывают полученные ранее результаты.

Даубен считал необходимым понимать математику шире, включая в нее способы мышления (modes of thought), т. е. методологию, стандарты строгости, терминологию, символику и т. п. Поэтому он считал, что в математике имеют место «концептуальные революции». Согласно Даубену, «революция обычно подразумевает радикальное изменение или отход от традиционных или приемлемых способов мышления», после которых становится «невозможным возврат к прежнему порядку вещей» [Dauben, 1984, p. 83; Dauben, 1992a, p. 51][2]. В качестве примеров концептуальных революций в математике он

---

[1] Об отношении самого Куна к спору о революциях в математике см. [Шапошников, 2019].

[2] Хотя ответная статья Даубена была опубликована лишь в 1984 г., ее содержание, по указанию самого автора, относится к 1977–1978 гг. Более того, Даубен ссылается также на более раннюю свою работу на ту же тему, оставшуюся в рукописи и датированную октябрем 1974 г. [Dauben, 1984, p. 81–82, 95; Dauben, 1992a, p. 49–50, 64, 71].

указывает на открытие несоизмеримых величин в античности и новую математику бесконечного Георга Кантора.

Подчеркну, что Даубен своим признанием революций не покушался на строгую кумулятивность и прогресс математики:

> Новые теории [в математике] не могут заменять собой (displace) старые, подобно тому как анализ не заменил собой геометрию. Будучи революционным, анализ, однако, не был несовместимым достижением, которое требовало бы от последующих поколений отказаться от Евклида; так же и трансфинитная математика Кантора не требовала замены и отказа от (displacement and rejection) предшествующей работы в анализе или какой-либо иной части математики. Достижения в математике тем самым, как правило, совместимы и не противоречат ранее установленным теориям; они не находятся в оппозиции и не бросают вызов правильности и законности более ранних достижений и теорий, но расширяют, выражают отчетливее и обобщают (augment, articulate, and generalize) то, что было принято ранее. Работе Кантора удалось трансформировать или оказать влияние на значительные части современной математики, не требуя при этом замены и отказа от предшествующей математики [Dauben, 1984, p. 93; 1992a, p. 62].

Играя словами, Даубен интерпретирует «revolution» в математике как «resolution», понимая это последнее слово в смысле смены «разрешения» прибора: подобно тому, как исследователь, рассматривающий нечто в микроскоп, может переходить от более низкого к более высокому разрешению, математики в смене поколений видят в своей области все больше тонких деталей и подробностей, что время от времени требует радикальных изменений в интерпретации и понимании картины в целом. Прогресс в математике – это переход ко все «более высокому разрешению (increasingly powerful resolution)»: ничего не выброшено из старой картины, но все, что на ней имелось, предстает на новом шаге в совершенно новом свете. И такому продвижению присущи многие из тех черт, которые, по Куну, присущи научным революциям: отчаянное сопротивление изменениям, переписывание учебников и споры вокруг оснований [Dauben, 1984, p. 93–95; 1992a, p. 62–64].

В 1992 г. под редакцией Дональда Джиллиса вышла книга «Революции в математике» [Gillies (ed.), 1992], в определенном смысле претендовавшая на подведение итогов начатого в 1970-е гг. спора. В ней Джиллис предлагает различать *революции русского типа*, удовлетворяющие жестким требованиям Кроу, и *революции франко-британского типа*, когда соответствующие теории не отбрасываются окончательно и бесповоротно, но лишь существенно понижаются в своем статусе. Его тезис звучит так: *в естествознании бывают революции обоих типов, а в математике – только франко-британского* [Gillies, 1992, p. 5–6]. Революция в математике характеризуется тем, что, во-первых, она должна изменять математику (или ее раздел) «глубоким и имеющим далеко-идущие последствия образом», а во-вторых, «соответствующие более старые части математики, хотя и сохраняются, но должны претерпеть существенную утрату значимости» [ibid., p. 6]. Сам Джиллис признает, что симпатизирует подходу Даубена и развивает именно его.

Ученица Джиллиса, Кэролайн Данмор, сторонник «метауровневых революций» в математике, напротив, скорее развивает, по мнению Джиллиса, подход Кроу. Она утверждает: «Математика консервативна на объектном уровне и революционна на метауровне» [Dunmore, 1992, p. 212][3]. Однако, в отличие от исходной позиции Кроу, Данмор настаивает на широком понимании математики или, как она выражается, «мира математики (the mathematical world or realm)» [ibid., p. 211]. На объектном уровне в него входят «понятия, терминология и система обозначений, определения, аксиомы и теоремы, методы доказательства и решения проблем и [сами] проблемы и предположения», на метауровне – «метаматематические ценности сообщества, которые определяют предельную цель и методы предмета и инкапсулируют общие убеждения о его природе» [ibid.].

Подход Данмор, при котором, как не без иронии замечает З.А. Сокулер, «и овцы (т. е. признанные математические результаты и методы) целы, и волки (т. е. авторы, утверждающие существование научных революций в истории математики) сыты» [Сокулер, 1995, с. 53], покоится на весьма спорном убеждении в возможности однозначно разделить объектный и метауровень в математике. «Автор убеждена, – пишет З.А. Сокулер, – в строгой кумулятивности "объектного уровня" математики. Ее не смущает, например, то, что в наше время никто не решает задачи методами греческой "геометрической алгебры" (хотя методы решения задач она помещает на объектный уровень)» [там же]. В самом деле, практически все, что Данмор поместила на объектный уровень математического мира – система понятий, терминология и система обозначений, конкретные определения, аксиомы и формулировки теорем, методы доказательства и решения проблем, сами проблемы и предположения – исторически изменчиво, регулярно отбрасывается в истории математики и не ведет себя кумулятивно.

Когда Кроу подразумевает *сохранение* полученных ранее результатов, то речь идет не о конкретных формулировках, но о некоторой не так-то легко уловимой *сути*, о *главном смысле результата*, который постоянно получает все новые и новые, уточненные и видоизмененные, формулировки. Ведь математика постоянно переписывается, и понимание и убеждение себя в идентичности старого знания и какой-то части нового знания также достигается через перевод (часто очень вольный) на современный язык[4].

Герберт Мертенс, еще один из ранних участников спора, с беспощадной ясностью подчеркивает это слабое место в позиции Кроу:

---

[3] В основу статьи Данмор в сборнике «Революции в математике» положены результаты ее диссертационного исследования 1989 г.

[4] Каждая новая парадигма, согласно Куну, дает свое прочтение прошлых достижений соответствующей научной области и заново выстраивает представление об историческом преемстве: см., например, его замечания о соотношении ньютоновской механики до релятивистской революции и ньютоновской механики после релятивистской революции (как приближения при малых скоростях относительно скорости света) [Kuhn, 1970, p. 101–102]. Неслучайно Кун посвятил целую главу своей книги (одиннадцатую) вопросу о том, как революционные изменения систематически маскируются под кумулятивный прирост знания. Сказанное им о революциях-невидимках в еще большей степени актуально для вопроса о революциях в математике, чем в естествознании.

> К несчастью, он (Кроу. – *В. Ш.*) не объясняет, что значит «*в* математике», лишь указывает, что терминология, система обозначений, метаматематика, методология и историография – не *в* математике. Вероятно, Кроу подразумевает «содержание» или «сущность» математики (но что это такое?). <…> Невозможно с уверенностью очистить содержание от терминологии, обозначений, метаматематики и т. п. В предлоге «в» кроется опасность для историка математики. Сегодняшний математик склонен объявлять всю историю [математики] предысторией той математики, которую знает он. Тем самым все, что включено в современную математику или выводимо из нее, оказывается «*в* математике». [При этом] исторически значимые черты, такие как способ употребления понятий, общие убеждения, касающиеся соответствующей дисциплины, и т. п. естественно не попадают «*в* математику» (курсив Дж. Даубена. – *В. Ш.*) [Mehrtens, 1976, p. 301–302; 1992a, p. 25].

Мертенс также призывает не переоценивать кумулятивность развития математики, при котором принятые ранее теории никогда не отбрасываются:

> Немногие математические теории, если вообще такие найдутся, были полностью отвергнуты (overthrown), однако многие теории вышли из употребления или были столь сильно изменены, что какое-либо сходство теперь едва ли вообще уловимо. Эти изменения часто происходили в результате взаимосвязанных изменений в «содержании» и «метафизике» соответствующей дисциплины [Mehrtens, 1976, p. 302; 1992a, p. 26].

Пример, приводимый Мертенсом в подтверждение высказанной позиции, – превращение классической алгебры в современную в период с 1830-х по 1930-е гг.

Парадоксальным образом, из приведенных цитат не стоит делать вывод, что Мертенс полагает революции в математике возможными. Напротив, он решительно отказывает «куновским революциям (Kuhnian revolutions)» как понятию в достаточной методологической полезности, хотя и признает существование в истории явлений, которые могли бы носить это имя. Причина в том, что названное понятие, с одной стороны, страдает недостаточной ясностью и определенностью, а с другой – перегружено не относящимися к делу коннотациями, например политическими. Подобная терминология, считает он, представляет опасность для истории математики. Поэтому Мертенс отвергает применимость к математике «общей схемы (the general pattern)» куновской концепции развития науки [Mehrtens, 1976, p. 312; 1992a, p. 35], но вместе с тем предлагает историкам математики взять на вооружение отдельные ее элементы, а именно понятия «научное сообщество», «парадигма» и «дисциплинарная матрица», «нормальная наука», «аномалия».

В целом книга «Революции в математике» создает впечатление, что *победа в споре Кроу и Даубена осталась за Даубеном, т. е. участники признали существование революций в математике*[5]. В самом деле, Кроу, Мертенс

---

[5] Сам Даубен именно так истолковал результат спора: революции в математике все-таки происходят, «каково, как кажется, сейчас мнение большинства тех, кто пишет на эту тему» [Dauben, 1996, p. 118].

и Даубен, три главных участника полемики 1970-х гг., специально для книги 1992 г. написали к своим старым статьям дополнения, которые красноречиво это демонстрируют.

В своем дополнении Даубен привел еще пару примеров концептуальных революций в истории математики: новый стандарт строгости в анализе (О.Л. Коши) и нестандартный анализ (А. Робинсон). Подводя итоги, он писал с воодушевлением:

> …когда происходит подлинная революция, существенная часть «более старой» математики оказывается замененной или значительно расширенной за счет понятий и техник, которые заметно меняют словарь и грамматику. <…> По мере того как математики осваиваются с новой математикой, изучая ее словарь и техники, их мышление также изменяется соответствующим образом. Как показывает история, математика не представляет собой простую последовательность результатов, образующих единую и непрерывную цепь, которая тянется от античности до настоящего времени. В ней есть собственные революционные моменты, и они столь же необходимы для ее прогресса, сколь революции необходимы для прогресса всей науки. <…> Каждое поколение, всякая эпоха устанавливает собственные границы, пределы, шоры в отношении того, что возможно, того, что приемлемо. Революции в математике выводят следующее поколение за пределы ранее установленного, к совершенно новым возможностям, как правило, невообразимым и немыслимым с точки зрения предыдущего поколения. Подлинно революционные прозрения делают разум открытым для восприятия новых связей и возможностей, новых элементов, иных методов и более высоких уровней абстрактности и общности. Революции *внутри* математики очевидным образом все-таки происходят (obviously do occur *within* mathematics). Если бы это было *не так*, мы по-прежнему считали бы на пальцах (курсив Дж. Даубена. – *В. Ш.*) [Dauben, 1992b, p. 80–81].

Приведенный текст характерно обтекаем, в частности, благополучно сочетает признание революций и сквозного прогресса математики. Несколько более определенно Даубен высказался по данному вопросу немного позже. Он настаивает на том, что Кроу и Данмор ошибаются, считая, что возможно наличие революций на метауровне при отсутствии их на объектном уровне математики. Сам Даубен убежден, что всякое революционное изменение на метауровне, которое он отождествляет со сменою парадигм в терминологии Куна и которое должно быть опознано в качестве такового современниками события, неизбежно коррелятивно должному и естественному расширению знания на объектном уровне, приросту в самом «теле» знания (in a body of knowledge), т. е. прогрессу [Dauben, 1996, p. 135–139, 143–144]. По всей видимости, концептуально позиция Даубена 1990-х гг. мало чем отличается от его же взглядов 1970-х гг.

Мертенс начинает с замечания, что, в отличие от прижившихся терминов «парадигма» и «научное сообщество», термин «революция» выглядит в начале 1990-х гг. «несколько вышедшим из моды (somewhat outmoded)» [Mehrtens, 1992b, p. 42]. Тем не менее он куда более примирительно, чем в 1970-е гг., настроен в отношении употребления слова «революции» при разговоре о развитии науки, но при условии его использования именно в качестве метафоры, т. е. преимущественно в стилистических целях. Исследователю надлежит помнить о политическом характере этой *метафоры* и о том, что подобные стилистические инструменты не слишком устойчивы, имеют тенденцию менять свое значение и спектр стандартных ассоциаций. Слово «революция» слишком ценностно нагружено, применение его к науке грозит участием в мифотворческом процессе поддержания или создания культа ученых-героев. Более серьезное и аналитическое использование данной метафоры потребовало бы анализа изменения в структурах власти и законности, произошедших в результате соответствующего события, что в случае математики и естествознания требует изрядного насилия над самой метафорой. По названным причинам Мертенс предлагает говорить не о «революциях», а вслед за Г. Башляром и М. Фуко об «эпистемологических препятствиях» и «эпистемологических разрывах» [Mehrtens, 1992b, p. 43]. Именно в терминах «препятствий (obstacles)» и «разрывов (raptures)» он предлагает описывать такие растянувшиеся почти на столетие события, как признание неевклидовых геометрий или рождение современной алгебры. Кроме того, для Мертенса важно рассматривать развитие математики на фоне других культурных процессов, понимать математику как «неотъемлемую часть интеллектуальной истории» [ibid., p. 48]. Например, рождение новой математики в конце XIX – начале XX в. коррелятивно явлению модернизма в искусстве. Это случайное совпадение или и то и другое следует рассматривать как часть единого культурного процесса [Mehrtens, 1990]? Помимо названного «разрыва» в истории математики XIX в., исследователь упоминает древнегреческий разрыв, разрыв эпохи Возрождения и, правда уже не столь уверенно, оформляющийся на наших глазах разрыв, связанный с результатами К. Гёделя и пришествием компьютеров [Mehrtens, 1992b, p. 46]. Стоит отвлечься от спора о терминологических тонкостях, и становится очевидным, что Мертенса следует признать сторонником «“революционных” разрывов (“revolutionary” raptures)», т. е. революций в математике [ibid., p. 44–48].

Послесловие для книги 1992 г. написал сам зачинщик спора М. Кроу. Он *фактически признает правоту своих оппонентов*[6], утверждая, что люди склонны переоценивать кумулятивный характер математики и что вопрос о наличии или отсутствии революций в математике в существенной степени есть вопрос определения математики и способа проведения ее границ. Свое

[6] Следует отметить, что уже в исходной статье, опубликованной, напомню, в 1975 г. и переизданной в книге 1992 г., Кроу демонстрировал *положительное* отношение к переносу в сферу истории математики многих нововведений постпозитивистской философии науки и *положительно* отзывался о работах И. Лакатоша и Р. Уайлдера, применявших эти новые идеи к математике в 1960-е гг. Свидетельство тому и первые девять из десяти сформулированных им «законов» (в кавычки это слово ставит и сам Кроу), которые как раз и являются «попытками применить прозрения новой историографии [естествознания] к математике» [Crowe, 1975, p. 162; 1992a, p. 16]. На их фоне последний (десятый) закон, утверждающий отсутствие революций в математике, выглядит, несмотря на данные автором комментарии, несколько неожиданным и инородным рудиментом неопозитивистских умонастроений. Ср. сходные наблюдения [François, Van Bendegem, 2010, p. 115–116].

более раннее (1967 г.) противопоставление «формационных» и «трансформационных» изменений Кроу теперь готов отождествить с предложенным Джиллисом различием двух типов революций (соответственно франко-британского и русского) [Crowe, 1992b, p. 310].

Спор или согласие?

Невзирая на все сказанное в предыдущем разделе, вывод о том, что победа в споре Кроу и Даубена осталась за Даубеном, при более внимательном рассмотрении довольно быстро оказывается поверхностным и неоправданно поспешным. Из того, что революции в математике все-таки происходят, вовсе не обязательно следует, что это «куновские» революции и что их можно плодотворно описывать с помощью разработанного им концептуального аппарата [Rowe, 1993, p. 321]. Как отмечает Б. Порсиоу [Pourciau, 2000, p. 297–303], признание кумулятивности математики на уровне «результатов» прямо противоречит куновской концепции революций, и в этом смысле Кроу был изначально прав: если такая кумулятивность в математике есть, то (куновских) революций в ней нет. Более того, Порсиоу обращает внимание, что практически все авторы книги «Революции в математике», так же как и сам Кроу, признают кумулятивность математических результатов. В связи с этим говорить надо не о «споре Кроу и Даубена», а о «согласии Кроу и Даубена» [Pourciau, 2000, p. 301], согласии в том, что революции в *куновском смысле* в математике по существу невозможны. Революции в математике, которые предлагают признать участники полемики, – это революции в каком-то ином, отличном от куновского, смысле. Сам Порсиоу, тем не менее, отстаивает тезис, что в математике возможны революции именно куновского типа. Попытку такой революции, не удавшейся лишь по случайному стечению исторических обстоятельств, он видит в интуиционистской математике Брауэра, которая «несоизмерима» с классической математикой.

Справедливость наблюдения Порсиоу подтверждается многочисленными публикациями, не вошедшими в книгу 1992 г., однако не менее показательными. Так, одновременно с возникновением спора между Кроу и Даубеном появилась статья Д. Грабинер «Изменяется ли математическая истина с течением времени?» [Grabiner, 1974] (Кроу ссылается на нее в своей инициировавшей полемику статье 1975 г.). Эта статья посвящена революции, произошедшей в математическом анализе при переходе от XVIII к XIX в. и состоявшей в изменении стандартов строгости. Завершается работа следующим выводом:

> Математика растет двумя способами: не только посредством последовательного расширения, но также посредством изредка происходящих революций. Только признавая возможность наличия ошибки в настоящем, мы можем надеяться на то, что будущее принесет фундаментальное улучшение наших знаний. Мы можем утешаться тем, что бóльшая часть старых кирпичей найдет место в новой постройке. Математика не является уникальной наукой без революций. Скорее, математика – та область человеческой деятельности, в которой происходят одновременно наименее разрушительные и все же наиболее фундаментальные революции [ibid., p. 364].

Описывая, как отношение к математической истине менялось со временем в истории математики, Грабинер характеризует происходящее как «переоценку (re-evaluations)» сделанного в математике ранее. Как видим, она старается признать революции, но в то же время сохранить решающую кумулятивность математики на уровне результатов («кирпичей»), неслучайно же она оценивает революции в математике как «наименее разрушительные» по сравнению, видимо, с революциями в других областях человеческого знания.

Бостонский научный семинар (август 1974 г.), посвященный развитию математики после 1800 г., на котором Кроу впервые представил свои «десять законов», также отнюдь не случайно в своем названии имел выражение «историческая эволюция» (не «революция»!)[7], а названия целого ряда зачитанных на нем докладов содержали слова «прогресс в математике» (куновский подход отрицал возможность говорить о едином и сквозном прогрессе в науке). В качестве показательного примера можно указать статью И. Коппельман [Koppelman, 1975], которая строит целую классификацию механизмов прогрессивного перехода от старого к новому в истории математики. В ответ на вопрос Кроу, заданный во время обсуждения ее доклада, признает ли она революционные изменения в математике, Коппельман ответила: «Революция в математике происходит не когда старые идеи отбрасывают как оказавшиеся ложными, но когда меняется их принятый масштаб и значение» [ibid., p. 463]. Для исследовательницы наличие революционных изменений никоим образом не противоречит кумулятивному развитию и прогрессу математики, чего, как известно, нельзя сказать о «куновском» понимании революций.

Список литературы

Сокулер, 1995 – *Сокулер З.А.* Зарубежные исследования по философским проблемам математики 90-х гг.: Научно-аналитический обзор. М.: ИНИОН, 1995. 75 с.

Шапошников, 2019 – *Шапошников В.А.* Признавал ли Кун революции в математике? // Вестник Моск. ун-та. Сер. 7: Философия. 2019. В печати.

Birkhoff, Garwood, 1975 – <Proceedings of the American Academy Workshop on the Historical Evolution of Modern Mathematics (Boston, August 7–8, 1974) / Ed. by G. Birkhoff, S.A. Garwood> // Historia Mathematica. 1975. Vol. 2. No. 4. P. 425–615.

Crowe, 1975 – *Crowe M.J.* Ten “Laws” Concerning Patterns of Change in the History of Mathematics // Historia Mathematica. 1975. Vol. 2. No. 2. P. 161–166.

Crowe, 1992a – *Crowe M.J.* Ten «Laws» Concerning Patterns of Change in the History of Mathematics (1975) // Revolutions in Mathematics / Ed. by D. Gillies. N. Y.: Oxford University Press, 1992. P. 15–20.

Crowe, 1992b – *Crowe M.J.* Afterword (1992): A Revolution in the Historiography of Mathematics? // Revolutions in Mathematics / Ed. by D. Gillies. N. Y.: Oxford University Press, 1992. P. 306–316.

Dauben, 1984 – *Dauben J.W.* Conceptual Revolutions and the History of Mathematics: Two Studies in the Growth of Knowledge // Transformation and Tradition in the Sciences: Essays

[7] Точное название этого семинара The American Academy Workshop on the Historical Evolution of Modern Mathematics. Материалы симпозиума опубликованы в 1975 г. в журнале «Historia Mathematica» (Vol. 2, No. 4).

in Honor of I. Bernard Cohen / Ed. by E. Mendelsohn. N. Y.: Cambridge University Press, 1984. P. 81–103.

Dauben, 1992a – *Dauben J.W.* Conceptual Revolutions and the History of Mathematics: Two Studies in the Growth of Knowledge (1984) // Revolutions in Mathematics / Ed. by D. Gillies. N. Y.: Oxford University Press, 1992. P. 49–71.

Dauben, 1992b – *Dauben J.W.* Appendix (1992): Revolutions Revisited // Revolutions in Mathematics / Ed. by D. Gillies. N. Y.: Oxford University Press, 1992. P. 72–82.

Dauben, 1996 – *Dauben J.W.* Paradigms and Proofs: How Revolutions Transform Mathematics // Paradigms and Mathematics / Ed. by E. Ausejo and M. Hormigón. Madrid: Siglo XXI de España Editores, 1996. P. 117–148.

Dunmore, 1992 – *Dunmore C.* Meta-Level Revolutions in Mathematics // Revolutions in Mathematics / Ed. by D. Gillies. N. Y.: Oxford University Press, 1992. P. 209–225.

François, Van Bendegem, 2010 – *François K., Van Bendegem J.P.* Revolutions in Mathematics. More Than Thirty Years after Crowe's "Ten Laws". A New Interpretation // PhiMSAMP. Philosophy of Mathematics: Sociological Aspects and Mathematical Practice / Ed. by B. Löwe and T. Müller. L.: College Publications, 2010. P. 107–120.

Gillies, 1992 – *Gillies D.* Introduction // Revolutions in Mathematics / Ed. by D. Gillies. N. Y.: Oxford University Press, 1992. P. 1–14.

Gillies (ed.), 1992 – Revolutions in Mathematics / Ed. by D. Gillies. N. Y.: Oxford University Press, 1992. 353 p.

Grabiner, 1974 – *Grabiner J.V.* Is Mathematical Truth Time-Dependent? // The American Mathematical Monthly. 1974. Vol. 81. No. 4. P. 354–365.

Koppelman, 1975 – *Koppelman E.* Progress in Mathematics // Historia Mathematica. 1975. Vol. 2. No. 4. P. 457–463.

Kuhn, 1970 – *Kuhn T.S.* The Structure of Scientific Revolutions, 2nd ed. Chicago: University of Chicago Press, 1970. 210 p.

Mehrtens, 1976 – *Mehrtens H.* T.S. Kuhn's Theories and Mathematics: A Discussion Paper on the "New Historiography" of Mathematics // Historia Mathematica. 1976. Vol. 3. No. 3. P. 297–320.

Mehrtens, 1990 – *Mehrtens H.* Moderne – Sprache – Mathematik: Eine Geschichte des Streits um die Grundlagen der Disziplin und des Subjekts formaler Systeme. Frankfurt am Main: Suhrkamp, 1990. 640 S.

Mehrtens, 1992a – *Mehrtens H.* T.S. Kuhn's Theories and Mathematics: A Discussion Paper on the "New Historiography" of Mathematics (1976) // Revolutions in Mathematics / Ed. by D. Gillies. N. Y.: Oxford University Press, 1992. P. 21–41.

Mehrtens, 1992b – *Mehrtens H.* Appendix (1992): Revolutions Reconsidered // Revolutions in Mathematics / Ed. by D. Gillies. N. Y.: Oxford University Press, 1992. P. 42–48.

Pourciau, 2000 – *Pourciau B.* Intuitionism as a (Failed) Kuhnian Revolution in Mathematics // Studies in the History and Philosophy of Science. Part A. 2000. Vol. 31. No. 2. P. 297–329.

Rowe, 1993 – *Rowe D.E.* Review of Gillies D. (ed.), Revolutions in Mathematics, Oxford University Press, 1992 // Historia Mathematica. 1993. Vol. 20. No. 3. P. 320–323.

Revolutions in mathematics: an old debate revisited. Part 1

Vladislav A. Shaposhnikov

Lomonosov Moscow State University. 27/4 Lomonosovsky Av., Moscow, GSP-1, 119991, Russian Federation; e-mail: shaposhnikov@philos.msu.ru

The 1970s to 1990s constitute a crucial period in the history of the philosophy of mathematics for it was the time when the philosophy of mathematical practice movement took shape. One of its most notable episodes arguably was the debate concerning the existence and meaning of revolutions in the history of mathematics which was triggered by the question whether T.S. Kuhn's extremely influential theory of science applies to mathematics or not. The paper attempts at revisiting that debate in search of its outcome and possible significance for the philosophy of mathematics nowadays. The debate was initiated by a Crowe – Dauben controversy: while M. Crowe claimed that revolutions never occur in mathematics, J. Dauben objected that revolutions do occur within it. Tracking the course of the debate during the three decades in question, in this paper, I have concluded that only the nominal victory was Dauben's while the real one was Crowe's. The existence of "revolutions" in the history of mathematics was generally accepted, but for the most part not in the Kuhnian sense of the word for that acceptance was combined with the ubiquitous presence of the belief in the strictly progressive accumulation of the results throughout the history of mathematics. In contradistinction to the scholarly works that assert the fruitlessness of the debate on revolutions in mathematics, in my paper, some intellectual trends brought to the fore by it are recognised. These trends are still highly relevant to the philosophy of mathematical practice; the positive ones call for further scrutiny while the negative ones for conscious opposition.

Keywords: philosophy of mathematics, philosophy of mathematical practice, revolutions in mathematics, cumulativity of the development of mathematics, T.S. Kuhn

References

Crowe, M.J. "Ten 'Laws' Concerning Patterns of Change in the History of Mathematics", *Historia Mathematica*, 1975, vol. 2, no. 2, pp. 161–166.

Crowe, M.J. "Ten'Laws' Concerning Patterns of Change in the History of Mathematics (1975)", in: *Revolutions in Mathematics*, ed. by D. Gillies. New York: Oxford University Press, 1992, pp. 15–20.

Crowe, M.J. "Afterword (1992): A Revolution in the Historiography of Mathematics?", in: *Revolutions in Mathematics*, ed. by D. Gillies. New York: Oxford University Press, 1992, pp. 306–316.

Dauben, J.W. "Conceptual Revolutions and the History of Mathematics: Two Studies in the Growth of Knowledge", in: *Transformation and Tradition in the Sciences: Essays in Honor of I. Bernard Cohen*, ed. by E. Mendelsohn. New York: Cambridge University Press, 1984, pp. 81–103.

Dauben, J.W. "Conceptual Revolutions and the History of Mathematics: Two Studies in the Growth of Knowledge (1984)", in: *Revolutions in Mathematics*, ed. by D. Gillies. New York: Oxford University Press, 1992, pp. 49–71.

Dauben, J.W. "Appendix (1992): Revolutions Revisited, in: *Revolutions in Mathematics*, ed. by D. Gillies. New York: Oxford University Press, 1992, pp. 72–82.

Dauben, J.W. "Paradigms and Proofs: How Revolutions Transform Mathematics", in: *Paradigms and Mathematics*, ed. by E. Ausejo and M. Hormigón. Madrid: Siglo XXI de España Editores, 1996, pp. 117–148.

Dunmore C. "Meta-Level Revolutions in Mathematics)", in: *Revolutions in Mathematics*, ed. by D. Gillies. New York: Oxford University Press, 1992, pp. 209–225.

François, K., Van Bendegem, J.P. "Revolutions in Mathematics. More Than Thirty Years after Crowe's 'Ten Laws'. A New Interpretation", in: *PhiMSAMP. Philosophy of Mathematics: Sociological Aspects and Mathematical Practice*, ed. by B. Löwe and T. Müller. London: College Publications, 2010, pp. 107–120.

Gillies, D. "Introduction", in: *Revolutions in Mathematics*, ed. by D. Gillies. New York: Oxford University Press, 1992, pp. 1–14.

Grabiner, J.V. "Is Mathematical Truth Time-Dependent?", *The American Mathematical Monthly*, 1974, vol. 81, no. 4, pp. 354–365.

Koppelman, E. "Progress in Mathematics", *Historia Mathematica*, 1975, vol. 2, no. 4, pp. 457–463.

Kuhn, T.S. *The Structure of Scientific Revolutions, 2nd ed.* Chicago: University of Chicago Press, 1970. 210 pp.

Mehrtens, H. "T.S. Kuhn's Theories and Mathematics: A Discussion Paper on the 'New Historiography' of Mathematics", *Historia Mathematica*, 1976, vol. 3, no. 3, pp. 297–320.

Mehrtens, H. *Moderne – Sprache – Mathematik: Eine Geschichte des Streits um die Grundlagen der Disziplin und des Subjekts formaler Systeme.* Frankfurt am Main: Suhrkamp, 1990. 640 S.

Mehrtens, H. "T.S. Kuhn's Theories and Mathematics: A Discussion Paper on the 'New Historiography' of Mathematics (1976)", in: *Revolutions in Mathematics*, ed. by D. Gillies. New York: Oxford University Press, 1992, pp. 21–41.

Mehrtens, H. "Appendix (1992): Revolutions Reconsidered", in: *Revolutions in Mathematics*, ed. by D. Gillies. New York: Oxford University Press, 1992, pp. 42–48.

Pourciau, B. "Intuitionism as a (Failed) Kuhnian Revolution in Mathematics", *Studies in the History and Philosophy of Science. Part A*, 2000, vol. 31, no. 2, pp. 297–329.

Revolutions in Mathematics, ed. by D. Gillies. New York: Oxford University Press, 1992. 353 pp.

Rowe, D.E. "Review of Gillies D. (ed.), Revolutions in Mathematics, Oxford University Press, 1992", *Historia Mathematica*, 1993, vol. 20, no. 3, pp. 320–323.

Shaposhnikov, V.A. "Priznaval li Kun revolyutsii v matematike?" [Did Kuhn Recognize Revolutions in Mathematics?], *Vestnik Moskovskogo Universiteta, Series 7: Philosophy*, 2019, forthcoming (In Russian)

Sokuler, Z.A. *Zarubezhnyye issledovaniya po filosofskim problemam matematiki 90-kh godov: Nauchno-analiticheskiy obzor* [Foreign Studies in the Philosophy of Mathematics of the 1990s: A Review]. Moscow: INION Publ., 1995. 75 pp. (In Russian)