Философия науки и техники
2020. Т. 25. № 1. С. 5–17
УДК 168+150

Philosophy of Science and Technology
2020, vol. 25, no. 1, pp. 5–17
DOI: 10.21146/2413-9084-2020-25-1-5-17

ТЕОРИЯ И МЕТОДОЛОГИЯ НАУКИ И ТЕХНИКИ

В.А. Шапошников

Революции в математике: возвращаясь к старому спору
Часть 2

Шапошников Владислав Алексеевич – кандидат философских наук, доцент. Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова. Российская Федерация, 119991, ГСП-1, Москва, Ломоносовский проспект, д. 27, корп. 4; e-mail: shaposhnikov@philos.msu.ru

Настоящая статья представляет собой вторую (завершающую) часть исследования, посвященного анализу спора о революциях в математике, который возник в 1970-е гг. и был вызван к жизни популярностью концепции научных революций Т. Куна. В первой части исследования было рассмотрено инициировавшее полемику противостояние двух известных историков математики, М. Кроу и Дж. Даубена. Кроу сформулировал десять «законов» развития математики, последний из которых утверждал отсутствие в математике революций, Даубен же предложил исторические свидетельства в пользу противоположной точки зрения. На основании анализа дальнейшего развития этой полемики – определенный итог которого постарался подвести Д. Джиллис, выступивший в 1992 г. редактором книги «Революции в математике» – был сделан предварительный вывод, что победа в споре Кроу и Даубена осталась, скорее, за Даубеном, поскольку подавляющее большинство участников, включая и самого Кроу, в итоге признало существование революций в математике. Затем было начато продолжающееся во второй части исследования обсуждение позиции Б. Порсиоу, поставившего под вопрос такой вывод. Согласно Порсиоу, следует говорить не столько о «споре», сколько о «согласии» между Кроу и Даубеном, поскольку ни один из них не признает нарушения кумулятивности в накоплении математических результатов и не сомневается в существовании сквозного прогресса математического знания. Рассмотрение многочисленных источников, не вошедших в книгу 1992 г., заставляет признать правоту Порсиоу и сделать вывод, что победу Даубена следует считать лишь номинальной, тогда как подлинную победу нужно признать за исходной позицией Кроу, поскольку кумулятивистский тезис так и остался незыблемым, а следовательно, существование «куновских» революций в математике не было признано. В ряде работ спор о революциях в математике объявляется безрезультатным. В данной статье делается иной вывод: этот спор выявил ряд интеллектуальных тенденций, обнажающих компромиссный характер доминирующих представлений о революциях в математике, а тем самым и о математике в целом.

Ключевые слова: философия математики, философия математической практики, революции в математике, кумулятивность развития математики, Т. Кун

Спор или согласие? (окончание)

Когда Кроу формулировал свои десять «законов» [Crowe, 1975; Gillies (ed.), 1992, p. 15–20], он вдохновлялся сходной попыткой Раймонда Уайлдера. Позднее Уайлдер предложил уточненную версию «законов, управляющих эволюцией математики», которая учитывала и вариант, предложенный Кроу. Четырнадцатый из них гласит: «Революции могут происходить в метафизике, символизме и методологии математики, но не в ядре математики (not in the core of mathematics)» [Wilder, 1981, p. 142]. Из следующих за приведенной формулировкой разъяснений становится ясно, что к областям, в которых могут происходить революции (это революции *в* математике!), Уайлдер относит также стандарты строгости математического доказательства. Однако в математике теории (которые, по-видимому, и образуют ее «ядро») не отбрасываются. Исключение, очевидно не нарушающее это правило, Уайлдер делает лишь для тех теорий, которые обнаружили свою противоречивость. Кроме того, в чистой математике могут мирно уживаться «альтернативные» теории (например, стандартный и нестандартный анализ, различные виды геометрий), ведь здесь нет «экспериментальной верификации», заставляющей естествоиспытателя сохранять только одну из альтернатив. Этим же объясняется готовность Уайлдера допустить наличие революционного отбрасывания теорий, которое он решительно отрицает для чистой математики, в сфере прикладной математики: «Конечно же, тот, кто *использует* математику, может отказываться (discard) от математических теорий, но это не имеет отношения к ядру математики; в *прикладной* математике революции могут происходить» [Ibid., p. 143]. Утверждаемый Уайлдером иммунитет в отношении революций для «ядра математики» особенно примечателен в свете последнего (двадцать третьего) из сформулированных им законов: «По причине ее основания в культуре (its cultural basis) в математике нет такой вещи как абсолютное, в ней есть только относительное» [Ibid., p. 148]. Этот последний закон представляет собой цитату из доклада Уайлдера 1950 г. «Культурное основание математики», в котором недвусмысленно разъяснялся его смысл:

> Ввиду того, что могут существовать и на деле существовали и существуют различные культуры, различные формы мышления и, следовательно, различные математики, представляется невозможным рассматривать математику… как что-либо иное, чем произведение человека, обладающее характером необходимости или истины не в большей степени, чем другие продукты культуры [Tymoczko (ed.), 1986, p. 196].

Если математика, тем самым, есть часть изменчивого «культурного потока (culture stream)», в который все мы погружены, то что помимо не вполне осознанной нами культурной привычки заставляет нас верить в кумулятивное и прогрессивное развитие некоторого неприкосновенного ее «ядра»?

Филип Китчер в книге «Природа математического знания» [Kitcher, 1983] склонен систематически сближать изменения научной практики в математике и в естествознании, однако весьма скептично настроен в отношении куновской темы нарушения непрерывности и революций в науке [Ibid., p. 162]. Он блестяще критикует поверхностное противопоставление кумулятивного развития математики некумулятивному развитию естествознания (в плане якобы отсутствия в истории математики серьезных «революционных споров», сохранения в неизменном виде определенных математических истин на протяжении всей человеческой истории и отвержения со временем лишь тех положений, принятие которых изначально было необоснованно) [Ibid., p. 155–158]. Тем не менее Китчер согласен с тем, что в математике в отличие от естествознания не отбрасывают установленные ранее теории. Когда в истории математики возникает угроза реального противостояния, она обычно разрешается благодаря «переинтерпретации (reinterpretation)», а не отбрасыванию. Используя эволюционную метафору, можно сказать, считает Китчер, что «математические теории демонстрируют более высокий уровень выживания по сравнению с теориями естественнонаучными» [Ibid., p. 158]. Вот откуда возникает «более сильное впечатление кумулятивности развития» математики по контрасту с естествознанием [Ibid., p. 159].

Сходную с Джудит Грабинер [Grabiner, 1974] позицию занимает Джон Макклири. Математики не отвергают результаты своих предшественников, «они стараются перенести настолько много прошлого, насколько представляется разумным, в нынешнюю картину своей дисциплины» [McCleary, McKinney, 1986, p. 51]. Революции, считает он, происходят главным образом в философии математики, т. е. в способе отвечать на вопрос «что есть математика?», отсюда уже вытекают принимаемые математическим сообществом типы проблем и приемлемые методы исследования, а они в свой черед определяют какие «части прошлого (parts of the past)» включаются в текущую парадигму, а какие – исключаются из нее. Макклири даже предпочитает называть подобные радикальные изменения во взгляде на математический мир не революциями, а «переориентациями (reorientations)», желая тем самым подчеркнуть специфику математики. Главное отличие состоит опять же в отношении к полученным ранее результатам: «[Ц]ентральная черта переориентации, которая отличает ее от революций Куна, – это ее отношение к принятым результатам прошлого; если вы вынуждены отказаться от слишком многого из прошлого, чтобы принять новую точку зрения, у нее нет шансов на успех» [Ibid., p. 52]. В качестве характерного примера Макклири указывает интуиционизм Брауэра, который требовал пожертвовать слишком многим из прошлых великих достижений, чтобы получить широкую поддержку в математическом сообществе. Тот самый пример, который будет убеждать Брюса Порсиоу [Pourciau, 2000] в возможности куновских революций в математике, убеждает Джона Макклири как раз в обратном!

Стремление тем или иным способом примирить кумулятивность математики с существованием в ее развитии революций характерно и для советских авторов 1980-х гг. [Кузнецова, 1984, с. 113–131; Рузавин, 1989]. И.С. Кузнецова признает наличие революций в математике, однако стремится свести их к революциям в *философии* математики: «По-видимому, *революции в математике затрагивают в первую очередь сферу философии математики, т. е. происходит* *переворот в понимании гносеологических проблем математики, касающихся ее отношения к действительности, природы математических понятий и аксиом*. А это уже ведет к решительным преобразованиям в самой математике» [Кузнецова, 1984, с. 117]. Вполне в духе логического позитивизма она признает математику чисто формальной наукой, поставленной над естествознанием и четко от него отделенной, а происходящие в ней «решительные преобразования» – не нарушающими кумулятивности в накоплении формализмов [Там же, с. 130]. Г.И. Рузавин старается примирить кумулятивность и революции, обращаясь к диалектике количества и качества: «Количественные, постепенные, кумулятивные изменения в математике, так же как и в других науках, в конце концов сопровождаются изменениями коренными, качественными, революционными» [Рузавин, 1989, с. 186]. Научные революции – это «наиболее радикальные, качественные изменения в *концептуальной структуре* научного знания», которые в случае математики сводятся к следующему: 1) «образование новых математических понятий или изменение *смысла, или значения, старых понятий*»; 2) «*возникновение новых теорий и методов математики*»; 3) «*концептуальное обобщение теорий и их интеграция*»; 4) «*изменение оснований математики и ее философии*» [Там же, с. 186–193]. Отметим, что Г.И. Рузавин характерным образом *объединяет* в своем понимании революций в математике черты кумулятивного прироста и революционного изменения, порывающего со старым знанием.

Последним автором, на котором мне хотелось бы остановиться в связи с подмеченной Брюсом Порсиоу [Pourciau, 2000] общей тенденцией в трактовке революций в математике, будет Лео Корри, который довел названную тенденцию до предельной ясности. Он основывает свое решение проблемы революций на различении «тела (body)» математики и ее «образов (images)»[Corry, 1989, p. 411–413; 1993, p. 106–108; 1996, p. 178–182; 2004/1996, p. 3–7]. Речь идет о различении вопросов первого уровня (о предмете исследования в данной дисциплине) и вопросов второго уровня или метавопросов (о самой дисциплине). Это выделение двух слоев в составе математического знания исторически детерминировано, есть смысл говорить о взаимном влиянии «тела» и «образов», которое имеет свою историю, и изучать его. Причем различные «образы» могут сосуществовать в истории, определяясь не только наличным «телом знания», но и внешними по отношению к нему социокультурными факторами. Особое внимание к мышлению второго уровня, равно как и термины «тело знания» и «образы знания», заимствованы Корри, как отмечает он сам, у известного историка и философа науки Иегуды Элкана [Elkana, 1981] и перенесены в область истории и философии математики. Корри особо подчеркивает «рефлексивность» математики, т. е. тенденцию к систематическому преобразованию вопросов второго уровня в вопросы первого уровня, в результате чего они переходят из сферы «образов» в состав «тела» в качестве «рефлексивного знания». Классический пример такого перехода – знаменитые теоремы Гёделя 1931 г.

«Тело математики» представляет собой, согласно Корри, объективное, стабильное и постоянно расширяющееся, т. е. ведущее себя кумулятивно, «твердое ядро (hard core)», в то время как «образы математики» – социально и исторически обусловленные и изменчивые результаты как внутренней, так и внешней для математики рефлексии по поводу ее методологии и природы. Эти «образы», с одной стороны, задают условия роста «тела» или «ядра» математики, а с другой – определяют собой философию и историографию математики. Не только «тело», но (правда, лишь отчасти) и «образы» математики находятся для Корри «внутри» математики. При этом происходящие в математике революции затрагивают *напрямую* только «образы»; *косвенно* они влияют, конечно же, и на характер роста ядра (ускоряя его или замедляя, возможно, меняя направление и порядок прироста нового знания), но не способны нарушить кумулятивный характер этого роста [Corry, 1989, p. 417–418, 424–425]. Обнаруживаемые в истории математики ошибки в «теле» математического знания – это в известных нам случаях «локальные ошибки», их исправление ведет лишь к «локальным улучшениям», характерным для того, что Кун называет «нормальной наукой» [Ibid., p. 421]. Стандартный пример – некоторые ошибочные доказательства О.Л. Коши в области математического анализа (1820-е гг.), связанные с тем, что он не различал непрерывность функции и ее равномерную непрерывность. Осознание необходимости такого различения (Б. Больцано, П.Г. Лежён Дирихле и, наконец, К. Вейерштрасс и его ученики в 1870-е гг.) и внесение соответствующих корректировок не имело катастрофических последствий для математического анализа и прошло достаточно мирно, так сказать, в рабочем порядке. В результате развитие математики на уровне «тела» представляется Корри «квазилинейным (quasi-linear)» и определяющимся универсально принятым стандартом, а именно существованием дедуктивного доказательства [Corry, 1993, p. 108; 1996, p. 181]. Кстати, сам этот стандарт представляет собой один из «образов математики», сопровождающий нас, по крайней мере, со времен Древней Греции. Появление в какой-то исторический момент этого образа Корри без сомнения готов признать революцией, более того – величайшей революцией в математике. Помимо этого он признает возможным, что в будущем люди станут свидетелями «второго *революционного* изменения в образах знания, по масштабу и значению сопоставимого с дедуктивной революцией (the deductive transformation)» [Corry, 1993, p. 110–114].

В отношении же «образов математики», согласно Корри, по-видимому, не существует универсального стандарта принятия, и «образы» возникают, трансформируются и исчезают вне линейной закономерности. «Образы» подвержены влиянию случайных нюансов исторического процесса. Кроме того, в отличие от «тела» «образы» сплошь и рядом могут располагаться на уровне неявного знания, что дополнительно усложняет анализ ситуации. Если революции в куновском смысле происходят в математике, то они относятся именно к ее «образам». Излюбленные же примеры Джозефа Даубена [Dauben, 1984; Gillies (ed.), 1992, p. 49–82; Dauben, 1996] – открытие несоизмеримых величин, трансфиниты Г. Кантора, нестандартный анализ А. Робинсона – не столько куновские революции, сколько «решающие прорывы (major breakthroughs)», которые относятся к кумулятивному расширению «тела математики». Пример, подробно разбираемый самим Корри, – «структурная революция в алгебре» (примерно между 1860 и 1930 гг.), в которой он видит подлинное революционное изменение в «образах математики», хотя и связанное с разнообразными кумулятивными приращениями в «теле математики» [Corry, 1993, p. 114–117; 1996, p. 185–189; 2004/1996].

Главную сложность в подходе Корри составляет статус «рефлексивного знания», которое связывает между собой «тело» и «образы» математики, ставя тем самым под вопрос возможность четкого их разграничения [Corry, 1989, p. 425]. Сам Корри полагает, что наличие пограничной, переходной области между «телом» и «образами» не компрометирует отстаиваемую им картину двухслойной структуры математики (the body/images scheme). Он также считает, что используемая им дихотомия принципиально лучше попытки отделить «математическое содержание» и «математическую форму», что изначально пытался сделать Майкл Кроу [Corry, 1996, p. 180; 2004/1996, p. 4]. В целом, на подход Корри можно смотреть как на тщательно продуманную, взвешенную и разработанную в деталях современную версию позиции Кроу.

Рассмотрение тех концепций, которые были созданы вслед за дискуссией М. Кроу и Дж. Даубена, позволяет скорректировать вывод, сделанный в первом разделе первой части настоящей статьи. Как показывает и книга «Революции в математике»[Gillies (ed.), 1992], и множество других текстов на эту тему, победа в споре Кроу и Даубена *лишь номинально, на словах* осталась за Даубеном, а *реально, на деле* – за Кроу: ведь хотя наличие революций в математике и было признано, это не привело к отказу от убеждения в строго кумулятивном развитии некоего таинственного «ядра» математики.

Попытка подвести итоги

Можно ли говорить о каких-то *общих результатах* спора о революциях в математике, пик которого пришелся на 1970–1990-е гг.? Во-первых, отметим, что публикации на эту тему продолжают появляться вплоть до настоящего времени, хотя поток их явственно оскудел[1]. Во-вторых, ряд исследователей считает, что спор этот в определенном смысле оказался бесплодным и зашел

---

1 В качестве примеров можно указать [Bueno, 2007; Родин, 2017; Sialaros (ed.), 2018]. О. Буэно строит аргументацию в пользу наличия куновских революций в математике через подтверждение существования *несоизмеримых* математических теорий в том же смысле, в котором Кун утверждал существование несоизмеримых физических теорий. Мы обнаруживаем эту несоизмеримость в математической практике, коль скоро мы достаточно внимательны к нюансам изменения значения математических терминов. Первый его пример – несколько теорий континуума (Г.В. Лейбница, К. Вейерштрасса, А. Робинсона), второй – несоизмеримость различных концепций множества (Г. Кантора, Цермело – Френкеля, фон Неймана – Бернайса – Гёделя). Математика, заключает Буэно, не может рассматриваться как собрание вечных, неизменных истин; для разговора о ее развитии требуется более нюансированный подход (a more fine-grained model) [Bueno, 2007, p. 102]. Позднее он развил такой подход в виде концепции многообразных узко понимаемых (в отличие от «широкого понимания» Я. Хакинга) стилей научного мышления [Bueno, 2012]. А.В. Родин предлагает свою версию компромиссной позиции: в соответствии с двойственным смыслом самого слова «революция» (и радикальное новшество, и возврат того же самого) он характеризует развитие математики как «перманентную революцию», что, с одной стороны, предполагает постоянную работу по *пересмотру* оснований математики, а с другой – постоянное *воспроизведение* всего объема накопленных результатов, хотя и в переформулированном виде. Его модельный пример – теорема Пифагора. Книга под редакцией М. Сиалароса напрямую предлагает соотнестись с полемикой, начатой в 1975 г. публикациями М. Кроу и С. Унгуру, и продолжить разговор о математических достижениях древних греков в терминах куновских революций.

в тупик. З.А. Сокулер резюмирует свой обзор книги Дональда Джиллиса [Gillies (ed.), 1992] следующими словами: «[П]озиции определены, аргументы приведены, но столкновение мнений продолжается, ибо вопрос является не фактологическим, а мировоззренческим. Все упирается в понимание различными авторами того, что является неотъемлемой составной частью самой математики, а что лежит "около" или "вокруг"» [Сокулер, 1995, с. 56]. «Так, где же этот спор оставляет нас? С чем мы остаемся за исключением безрезультатной полемики, которую лучше было бы прекратить? Или требуется избрать иную перспективу?» [François, Van Bendegem, 2010, p. 113] – вопрошают Карен Франсуа и Жан-Поль Ван Бендегем. Они выступают за то, чтобы вовсе оставить Куна с его революциями и попытать счастья с Имре Лакатошем, предлагающим (в интерпретации этих авторов) перейти с макро- на микроуровень в рассмотрении развития математических практик.

Мне ситуация видится не в столь пессимистичном свете. Рискну подвести итоги спора о революциях в математике в виде перечисления *четырех тенденций*, явственно наметившихся в ходе развертывания полемики.

1. Тенденция к расширению представления о составе математики: понятие математики не может быть ограничено доказанными утверждениями и образуемыми ими теориями, к этому нужно добавить способы их получения (методологию и стандарты строгости, терминологию, системы обозначений и используемые графические средства), а затем – образы математики (проблемы и предположения, приоритеты, предпочтения и ценности, представления о природе математики и ее месте в системе культуры, ее истории и возможном будущем и т. п.). Я перечислил те моменты, которые активно обсуждались в ходе спора о революциях в математике, однако продолжение следует.

2. Тенденция к подчеркнуто отрефлексированному употреблению слова «революция» в применении к математике и плюрализму в его понимании.

3. Тенденция к компромиссу между сохранением представления о кумулятивном развитии математики и признанием наличия революций в ее истории.

4. Тенденция к изоляционизму: попытка сохранить жесткую границу между математикой и естествознанием, декларированную в рамках логического позитивизма.

Из названных тенденций, первые две представляются мне *позитивными* и требующими дальнейшего развития, в то время как последние две – безусловно *негативными*, свидетельствующими о том, что философия математической практики отчасти унаследовала крайнюю консервативность традиционной философии математики.

Начну с позитивных тенденций. Первая тенденция находит естественное продолжение во включении в понятие математики *математического сообщества*, т. е. самих математиков, конституирующей их профессиональное сообщество системы социальных отношений и способа включения этого сообщества, или сообществ, в более широкое социальное целое[2]. На следующем шаге

[2] Этот момент был предельно ясно сформулирован Марио Бунге в данном им определении «области знания (field of knowledge)» или «эпистемического поля (epistemic field)» [Bunge, 1983a, p. 88–92]. Отмечу также весьма импонирующую мне позицию Бунге, состоящую в том, что он, хотя и разделяет «системы убеждений (belief systems)» и «области исследования

мы можем также постараться учесть не только социальный, но и существенный материальный аспект профессиональных практик, характерных для математического сообщества[3].

Вторая тенденция состоит в отходе от употребления слова «революция» в применении к математике в качестве чисто оценочного метафорического средства (что представляется важным достижением, то и называется революцией). Далее следует попытка превратить слово «революция» в термин и его дифференциация, т. е. выделение многих типов революций. Наконец, к этой же тенденции относятся поиски не столь перегруженных коннотациями альтернативных терминов, которые имеют больше шансов стать точными в употреблении.

Две оставшиеся тенденции я охарактеризовал выше как негативные, поскольку они мешают своевременному усвоению философией математической практики новейших философских тенденций и маргинализируют существующие попытки их решительного применения к анализу математики[4]. Эти тенденции отдают дань двум ставшим классическими философско-математическим мифам. Согласно первому, математическое доказательство – это эталон строгости, доказанное в математике утверждение есть абсолютная истина, оно не может быть отвергнуто никогда, а следовательно, развитие математики может быть лишь строго кумулятивным. Согласно второму, математика – совершенно особая и автономная наука, принципиально отличающаяся от всех остальных областей человеческого знания и всерьез от них не зависящая. На мой взгляд, требуется особое усилие по развенчанию и преодолению этих мифов.

Именно *радикальность* позиции Куна в «Структуре научных революций» сделала эту книгу значимой и влиятельной. Перспективной в контексте спора о революциях в математике мне представляется позиция тех немногих авторов, которые готовы бескомпромиссно признать наличие именно куновских революций в математике. Стоит опробовать гипотезу о том, что пресловутая кумулятивность развития математики есть не что иное, как социально конструируемая и социально поддерживаемая иллюзия. Мы постоянно переосмысливаем и переписываем историю так, чтобы убедить себя и других в незыблемости и универсальности математических результатов. Возможно, это связано с тем,

(fields of inquiry)», но принципиально не отрывает различные типы исследовательских эпистемических полей друг от друга, а тем самым – математику от других наук, технологических областей и гуманитаристики. В этой связи он с завидной легкостью признает наличие «эпистемических революций» в математике, а именно в математическом анализе, математической логике и теории множеств, абстрактной алгебре. Наряду с этим он перечисляет целый ряд «эпистемологических революций» в истории человечества, которые также в разной степени затрагивали и продолжают затрагивать математику. Критика Бунге в адрес кумулятивизма умеренна, но также показательна: он решительно отвергает как крайний кумулятивизм, который именует «градуализмом», так и крайний революционизм, под именем «катастрофизма», предлагая «эволюционизм», который всегда сохраняет частичное преемство с предыдущими «телами» знания, но не предполагает, однако, какого-либо сохраняющегося на протяжении всей истории неустранимого ядра [Bunge, 1983b, p. 175–184].

3 См. некоторые попытки в этом направлении [Barany, MacKenzie, 2014; Greiffenhagen, 2014].

4 В качестве характерного примера маргинализированной точки зрения можно указать на трактовку математики в рамках «сильной программы» в социологии научного знания Дэвида Блура. См. ответ Блура на критику его позиции по данному вопросу [Bloor, 1991, p. 179–183].

что одной из главных общесоциальных функций математики, по-видимому, изначально было и остается обеспечение *стандартизации* как условия успешности широкомасштабной коммуникации[5]. Последнее соображение подводит нас к сомнению и в автономности математики, которая представляет собой пестрый набор разнообразных исторически изменчивых социальных практик, лишь с определенной натяжкой отделимых от иных практик, как повседневных, так и научных.

Можно и нужно существенно усилить революционный характер развития математики в нашем восприятии, критикуя саму возможность исторически-инвариантным образом выделить ее «ядро» (Уайлдер), четко отделить объектный уровень от метауровня (Данмор) или «математическое содержание» от «математической формы» (Кроу в формулировке Корри), или «тело» от «образов» (Корри). Тем самым революции на метауровне будут неизбежно затрагивать и предполагаемый объектный уровень математики, радикальное изменение «формы» – менять и «содержание», а «ядро» перестанет быть «абсолютно твердым», представ исторически изменчивым и пластичным. Тогда куновские революции в математике утратят свою невидимость, имеющиеся в ней несоизмеримости сделаются заметными, а намечавшиеся в истории, но не реализовавшиеся альтернативы смогут стать предметом специального анализа. Методологически такой ход представляется оправданным, даже если конкретные ситуационные исследования, которые он делает возможными, в дальнейшем обнаружат, что он был избыточно радикален.

Список литературы

Кузнецова, 1984 – *Кузнецова И.С.* Гносеологические проблемы математического знания. Л.: Изд-во Ленинградского ун-та, 1984. 136 с.

Родин, 2017 – *Родин А.В.* Концепция перманентной научной революции и основания математики (возвращаясь к спору между Кроу и Даубеном) // Революция и эволюция: модели развития в науке, культуре, социуме. Сб. научных статей / Под ред. И.Т. Касавина и А.М. Фейгельмана. Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского ун-та им. Н.И. Лобачевского, 2017. С. 34–36.

Рузавин, 1989 – *Рузавин Г.И.* Об особенностях научных революций в математике // Методологический анализ закономерностей развития математики / Под ред. А.Г. Барабашева, С.С. Демидова и М.И. Панова. М.: ВИНИТИ, 1989. С. 180–193.

Сокулер, 1995 – *Сокулер З.А.* Зарубежные исследования по философским проблемам математики 90-х гг.: Научно-аналитический обзор. М.: ИНИОН, 1995. 75 с.

Barany, MacKenzie, 2014 – *Barany M.J., MacKenzie D.* Chalk: Materials and Concepts in Mathematics Research // Representation in Scientific Practice Revisited / Ed. by C. Coopmans, J. Vertesi, M. Lynch and S. Woolgar. Cambridge, MA: The MIT Press, 2014. P. 107–129.

Bloor, 1991 – *Bloor D.* Knowledge and Social Imagery. 2nd ed. Chicago: University of Chicago Press, 1991. 203 p.

Bueno, 2007 – *Bueno O.* Incommensurability in Mathematics // Perspectives on Mathematical Practices / Ed. by B. Van Kerkhove and J.P. Van Bendegem. Dordrecht: Springer, 2007. P. 83–105.

---

[5] Ср. рассуждения Теодора Портера по поводу количественного анализа (quantification) как технологического приема для решения социальных проблем дистанции и недостатка доверия [Porter, 1995, p. ix–x].

Bueno, 2012 – *Bueno O.* Styles of Reasoning: A Pluralist View // Studies in History and Philosophy of Science. Part A. 2012. Vol. 43. No. 4. P. 657–665.

Bunge, 1983a – *Bunge M.* Treatise on Basic Philosophy, Vol. 5. Epistemology and Methodology I: Exploring the World. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 1983. 404 p.

Bunge, 1983b – *Bunge M.* Treatise on Basic Philosophy, Vol. 6. Epistemology and Methodology II: Understanding the World. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 1983. 296 p.

Corry, 1989 – *Corry L.* Linearity and Reflexivity in the Growth of Mathematical Knowledge // Science in Context. 1989. Vol. 3. No. 2. P. 409–440.

Corry, 1993 – *Corry L.* Kuhnian Issues, Scientific Revolutions and the History of Mathematics // Studies in History and Philosophy of Science. Part A. 1993. Vol. 24. No. 1. P. 95–117.

Corry, 1996 – *Corry L.* Paradigms and Paradigmatic Change in the History of Mathematics // Paradigms and Mathematics / Ed. by E. Ausejo and M. Hormigón. Madrid: Siglo XXI de España Editores, 1996. P. 169–191.

Corry, 2004/1996 – *Corry L.* Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures. 2nd rev. ed. Basel: Birkhäuser, 2004. 451 p. (First edition was published in 1996.)

Crowe, 1975 – *Crowe M.J.* Ten "Laws" Concerning Patterns of Change in the History of Mathematics // Historia Mathematica. 1975. Vol. 2. No. 2. P. 161–166.

Dauben, 1984 – *Dauben J.W.* Conceptual Revolutions and the History of Mathematics: Two Studies in the Growth of Knowledge // Transformation and Tradition in the Sciences: Essays in Honor of I. Bernard Cohen / Ed. by E. Mendelsohn. N.Y.: Cambridge University Press, 1984. P. 81–103.

Dauben, 1996 – *Dauben J.W.* Paradigms and Proofs: How Revolutions Transform Mathematics // Paradigms and Mathematics / Ed. by E. Ausejo and M. Hormigón. Madrid: Siglo XXI de España Editores, 1996. P. 117–148.

Elkana, 1981 – *Elkana Y.* A Programmatic Attempt at an Anthropology of Knowledge // Sciences and Cultures: Anthropological and Historical Studies of Sciences / Ed. by E. Mendelsohn and Y. Elkana. Dordrecht: D. Reidel, 1981. P. 1–76.

François, Van Bendegem, 2010 – *François K., Van Bendegem J.P.* Revolutions in Mathematics. More Than Thirty Years after Crowe's "Ten Laws". A New Interpretation // PhiMSAMP. Philosophy of Mathematics: Sociological Aspects and Mathematical Practice / Ed. by B. Löwe and T. Müller. L.: College Publications, 2010. P. 107–120.

Gillies (ed.), 1992 – Revolutions in Mathematics / Ed. by D. Gillies. N.Y.: Oxford University Press, 1992. 353 p.

Grabiner, 1974 – *Grabiner J.V.* Is Mathematical Truth Time-Dependent? // The American Mathematical Monthly. 1974. Vol. 81. No. 4. P. 354–365.

Greiffenhagen, 2014 – *Greiffenhagen C.* The Materiality of Mathematics: Presenting Mathematics at the Blackboard // The British Journal of Sociology. 2014. Vol. 65. No. 3. P. 502–528.

Kitcher, 1983 – *Kitcher P.* The Nature of Mathematical Knowledge. N.Y.: Oxford University Press, 1983. 296 p.

McCleary, McKinney, 1986 – *McCleary J., McKinney A.* What Mathematics Isn't // Mathematical Intelligencer. 1986. Vol. 8. No. 3. P. 51–53, 77.

Porter, 1995 – *Porter T.M.* Trust in Numbers: The Pursuit of Objectivity in Science and Public Life. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1995. 310 p.

Pourciau, 2000 – *Pourciau B.* Intuitionism as a (Failed) Kuhnian Revolution in Mathematics // Studies in the History and Philosophy of Science. Part A. 2000. Vol. 31. No. 2. P. 297–329.

Sialaros (ed.), 2018 – Revolutions and Continuity in Greek Mathematics / Ed. by M. Sialaros. Berlin: De Gruyter, 2018. 391 p.

Tymoczko (ed.), 1986 – New Directions in the Philosophy of Mathematics: An Anthology / Ed. by T. Tymoczko. Boston, MA: Birkhäuser, 1986. 341 p.

Wilder, 1981 – *Wilder R.L.* Mathematics as a Cultural System. Oxford: Pergamon Press, 1981. 190 p.

Revolutions in mathematics: an old debate revisited
Part 2

Vladislav A. Shaposhnikov

Lomonosov Moscow State University. 27/4 Lomonosovsky Av., Moscow, GSP-1, 119991, Russian Federation; e-mail: shaposhnikov@philos.msu.ru

This paper is the second (and final) part of a study of the debate concerning the existence and meaning of revolutions in the history of mathematics. The discussion in question has emerged in the 1970s and was inspired by T.S. Kuhn's hugely influential theory of science. In the previous part of this study, an initial Crowe – Dauben controversy is considered. M.J. Crowe put forward ten "laws" concerning the evolution of mathematics with the final one stating that revolutions never occur in mathematics. At the same time, J.W. Dauben tried to support the occurrence of revolutions in mathematics. The story of the debate – which was famously summed up in D. Gillies's 1992 edited collection "Revolutions in Mathematics" – apparently suggested that Dauben's position entirely predominates over Crowe's among the scholars; even Crowe was finally forced to acknowledge the occurrence of revolutions in mathematics. In 2000 B. Pourciau disputed such a view of the debate's outcome, stressing that the overwhelming majority of the scholars who took part in the 1992 collection, happily married the recognition of revolutions in the history of mathematics with the strictly cumulative character of mathematics as far as mathematical results are concerned. In other words, they were talking about "revolutions" that cannot be called "Kuhnian". It means that only the nominal victory is Dauben's while the real one is Crowe's. In this part of the study, a lot of additional material belonging to the debate is analyzed. This analysis corroborates Pourciau's thesis and takes a closer look at the varieties of the "compromise" position accepting revolutions in mathematics on one level while rejecting them on the other. Some reviewers consider the debate on the revolutions in mathematics futile. Still, this study shows it to be highly instructive in bringing to light some ambivalent trends in the philosophy of mathematical practice.

Keywords: philosophy of mathematics, philosophy of mathematical practice, revolutions in mathematics, cumulativity of the development of mathematics, T.S. Kuhn

References

Barany, M.J., MacKenzie, D. "Chalk: Materials and Concepts in Mathematics Research", in: *Representation in Scientific Practice Revisited*, ed. by C. Coopmans, J. Vertesi, M. Lynch and S. Woolgar. Cambridge, MA: The MIT Press, 2014, pp. 107–129.

Bloor, D. *Knowledge and Social Imagery. 2nd ed.* Chicago: University of Chicago Press, 1991. 203 pp.

Bueno, O. "Incommensurability in Mathematics", in: *Perspectives on Mathematical Practices*, ed. by B. Van Kerkhove and J.P. Van Bendegem. Dordrecht: Springer, 2007, pp. 83–105.

Bueno, O. "Styles of Reasoning: A Pluralist View", *Studies in History and Philosophy of Science. Part A,* 2012, vol. 43, no. 4, pp. 657–665.

Bunge, M. *Treatise on Basic Philosophy, Vol. 5. Epistemology and Methodology I: Exploring the World.* Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 1983. 404 pp.

Bunge, M. *Treatise on Basic Philosophy, Vol. 6. Epistemology and Methodology II: Understanding the World.* Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 1983. 296 pp.

Corry, L. "Linearity and Reflexivity in the Growth of Mathematical Knowledge", *Science in Context*, 1989, vol. 3, no. 2, pp. 409–440.

Corry, L. “Kuhnian Issues, Scientific Revolutions and the History of Mathematics”, *Studies in History and Philosophy of Science. Part A*, 1993, vol. 24, no. 1, pp. 95–117.

Corry, L. “Paradigms and Paradigmatic Change in the History of Mathematics”, in: *Paradigms and Mathematics*, ed. by E. Ausejo and M. Hormigón. Madrid: Siglo XXI de España Editores, 1996, pp. 169–191.

Corry, L. *Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures. 2nd rev. ed.* Basel: Birkhäuser, 2004.

Crowe, M.J. “Ten ‘Laws’ Concerning Patterns of Change in the History of Mathematics”, *Historia Mathematica*, 1975, vol. 2, no. 2, pp. 161–166.

Dauben, J.W. “Conceptual Revolutions and the History of Mathematics: Two Studies in the Growth of Knowledge”, in: *Transformation and Tradition in the Sciences: Essays in Honor of I. Bernard Cohen*, ed. by E. Mendelsohn. New York, NY: Cambridge University Press, 1984, pp. 81–103.

Dauben, J.W. “Paradigms and Proofs: How Revolutions Transform Mathematics”, in: *Paradigms and Mathematics*, ed. by E. Ausejo and M. Hormigón. Madrid: Siglo XXI de España Editores, 1996, pp. 117–148.

Elkana, Y. “A Programmatic Attempt at an Anthropology of Knowledge”, in: *Sciences and Cultures: Anthropological and Historical Studies of Sciences*, ed. by E. Mendelsohn and Y. Elkana. Dordrecht: D. Reidel, 1981, pp. 1–76.

François, K., Van Bendegem, J.P. “Revolutions in Mathematics. More Than Thirty Years after Crowe’s‘Ten Laws’. A New Interpretation”, in: *PhiMSAMP. Philosophy of Mathematics: Sociological Aspects and Mathematical Practice*, ed. by B. Löwe and T. Müller. London: College Publications, 2010, pp. 107–120.

Gillies, D. (ed.). *Revolutions in Mathematics.* New York, NY: Oxford University Press, 1992. 353 pp.

Grabiner, J.V. “Is Mathematical Truth Time-Dependent?”, *The American Mathematical Monthly*, 1974, vol. 81, no. 4, pp. 354–65.

Greiffenhagen, C. “The Materiality of Mathematics: Presenting Mathematics at the Blackboard”, *The British Journal of Sociology*, 2014, vol. 65, no. 3, pp. 502–528.

Kitcher, P. *The Nature of Mathematical Knowledge.* New York, NY: Oxford University Press, 1983. 296 pp.

Kuznetsova, I.S. *Gnoseologicheskiye problemy matematicheskogo znaniya* [Epistemological Problems of Mathematical Knowledge]. Leningrad: Leningrad University Press, 1984. 136 pp. (In Russian)

McCleary, J., McKinney, A. “What Mathematics Isn’t”, *Mathematical Intelligencer*, 1986, vol. 8, no. 3, pp. 51–53, 77.

Porter, T.M. *Trust in Numbers: The Pursuit of Objectivity in Science and Public Life.* Princeton, NJ: Princeton University Press, 1995. 310 pp.

Pourciau, B. “Intuitionism as a (Failed) Kuhnian Revolution in Mathematics”, *Studies in the History and Philosophy of Science. Part A*, 2000, vol. 31. no. 2, pp. 297–329.

Rodin, A.V. “Kontseptsiya permanentnoy nauchnoy revolyutsii i osnovaniya matematiki (vozvrashchayas’ k sporu mezhdu Krou i Daubenom)” [The Concept of Permanent Scientific Revolution and the Foundations of Mathematics: the Crowe–Dauben Debate Revisited], in: *Revolyutsiya i evolyutsiya: modeli razvitiya v nauke, kul’ture, sotsiume* [Revolution and Evolution: Models of Development in Science, Culture and Society], ed. by I.T. Kasavin and A.M. Feigelman. Nizhny Novgorod: Lobachevsky University Press, 2017, pp. 34–36. (In Russian)

Ruzavin, G.I. “Ob osobennostyakh nauchnykh revolyutsiy v matematike” [On the Special Characteristics of Scientific Revolutions in Mathematics], in: *Metodologicheskiy analiz zakonomernostey razvitiya matematiki* [Methodological Analysis of the Patterns of Change in Mathematics], ed. by A.G. Barabashev, S.S. Demidov and M.I. Panov. Moscow: VINITI, 1989, pp. 180–193. (In Russian)

Sialaros, M. (eds.) *Revolutions and Continuity in Greek Mathematics*. Berlin: De Gruyter, 2018. 391 pp.

Sokuler, Z.A. *Zarubezhnyye issledovaniya po filosofskim problemam matematiki 90-kh godov: Nauchno-analiticheskiy obzor* [Foreign Studies in the Philosophy of Mathematics of the 1990s: A Review]. Moscow: INION, 1995. 75 pp. (In Russian)

Tymoczko, T. (ed.) *New Directions in the Philosophy of Mathematics: An Anthology*. Boston, MA: Birkhäuser, 1986. 341 pp.

Wilder, R.L. *Mathematics as a Cultural System*. Oxford: Pergamon Press, 1981. 190 pp.