Философия науки и техники
2021. Т. 26. № 1. С. 64–77
УДК 168.51

Philosophy of Science and Technology
2021, vol. 26, no. 1, pp. 64–77
DOI: 10.21146/2413-9084-2021-26-1-64-77

## ТЕОРИЯ И МЕТОДОЛОГИЯ НАУКИ И ТЕХНИКИ

*В.А. Шапошников*

# Миф о трех кризисах в основаниях математики Часть 1*

***Шапошников Владислав Алексеевич*** – кандидат философских наук, доцент. Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова. Российская Федерация, 119991, г. Москва, ГСП-1, Ломоносовский проспект, д. 27, корп. 4; e-mail: shaposhnikov@philos.msu.ru

В отечественной литературе по философии математики большой популярностью пользуется повествование о трех кризисах в основаниях математики. В настоящей статье делается попытка оценить состоятельность этого представления, опираясь на современные исследования по истории математики. В итоге делается вывод, что в данном случае мы имеем дело не столько с заслуживающей серьезного отношения историко-философской концепцией, сколько с плодом современного мифотворчества, порожденным неосознанным стремлением исследователей рассматривать всю историю математики по образцу событий первых десятилетий XX в., известных как «кризис оснований». Кроме того, обсуждение характера и роли оснований в ранней греческой математике и в математике XVIII в. дает удачный повод для постановки более общего вопроса о смысле историчности математики. В первой части статьи рассматривается вопрос о том, был ли в доевклидовой греческой математике кризис оснований, вызванный открытием несоизмеримости и/или апориями Зенона. Вывод оказывается отрицательным: у нас нет никаких прямых исторических свидетельств такого кризиса, косвенные же соображения также говорят о его отсутствии. Само представление о существовании первого кризиса возникло в конце XIX – первой половине XX в. и явилось порождением недостаточно обоснованного проецирования на Античность современного для того времени понимания оснований и господствовавшего в ту эпоху кризисного сознания.

***Ключевые слова:*** философия математики, основания математики, открытие несоизмеримости, кризис оснований, историчность

* Более раннюю и краткую версию рассуждений на тему данной статьи см. в [Shaposhnikov, 2021, p. 15–19].

> Теперь же всё, буквально всё становится историчным. Всё, что мы хотим понять, мы можем теперь понять только через историю.
>
> *Михаил Ямпольский* [Ямпольский, 2013, web]

Насколько мне известно, locus classicus рассказа о трех кризисах – пятый параграф первой главы влиятельной книги Френкеля и Бар-Хиллела «Основания теории множеств», который так и называется «Три кризиса» [Fraenkel, Bar-Hillel, 1958, p. 14–15; Френкель, Бар-Хиллел, 1966, с. 26–28; Fraenkel, Bar-Hillel, Levy, 1973, p. 12–14]. В нем авторы стремятся наметить историческую перспективу для рассмотрения кризиса оснований математики начала XX столетия. Они желают убедить своих читателей в том, что это событие отнюдь не уникально в истории математики. С этой целью они дополняют картину первым кризисом в основаниях математики, который был вызван открытием несоизмеримых величин и парадоксами Зенона в V в. до Р.Х., а также вторым кризисом, порожденным проблемами в основаниях математического анализа уже в Новое время. Легко заметить, что идея эта была не столь уж нова, если вспомнить, что еще Герман Вейль – один из тех, кому мы главным образом обязаны популяризацией мысли о том, что математика начала XX в. переживала кризис, – писал о новом кризисе оснований [Weyl, 1921; Вейль, 1934], т.е. смотрел на него как на первый в истории.

Простенькая схема, предложенная Френкелем и Бар-Хиллелом, обладала, как оказалось, значительным мифотворческим потенциалом. Возможно, все дело в стандартном символическом значении числа три как одного из простейших и главных чисел полноты. Предложенные три кризиса были равномерно распределены по трем главным эпохам в истории математики: один – в Античности, один – в Новое время и один – в наше (Новейшее) время. Правда, оказалось пропущенным Средневековье, но это не слишком портило картину, ведь традиционно Средневековье воспринималось и воспринимается как «мертвый период» в истории науки вообще и математики в частности. Во всяком случае, символическое послание считывалось достаточно легко: кризисы оснований регулярно происходят в истории математики; наш кризис далеко не первый и, по всей видимости, не последний.

Возможно, именно простота и символичность повествования о трех кризисах сделали его весьма популярным у российских авторов[1]. Оно стало чем-то вроде части фольклора: на концепцию трех кризисов ссылаются как на традиционную, общеизвестную и анонимную. При этом весьма характерно, что если сами Френкель и Бар-Хиллел относили второй кризис к началу XIX в., то в фольклорной версии он «сполз» на XVII–XVIII вв., в полном согласии с внутренней логикой соответствующего мифа. Отмечу, для контраста, что в современной англоязычной литературе по истории и философии математики мне не удалось найти ни одного случая использования этой схемы трех кризисов.

---

[1] Имя им легион. Диапазон текстов варьируется от научно-популярной и учебной литературы до научных публикаций. Сошлюсь, для примера, только на двух авторов [Сухотин, 1980/1978, с. 10–13; 2004, гл. 5, пар. 1; Яшин, 2015/2012, гл. 3; 2018, с. 161].

Мой тезис, который я постараюсь обосновать в этой статье, состоит в том, что, говоря о трех кризисах, названные авторы, осознанно или неосознанно, неоправданно проецируют весьма специфический способ интерпретации текущей ситуации в математике (речь идет о математике первой половины XX в.) как на прошлое, так и на будущее этой дисциплины.

Это, однако, не всё. Популярность концепции трех кризисов говорит нечто важное о том, как мы представляем себе историю математики. С одной стороны, слово «кризис» подчеркивает готовность признать, что у математики *есть* история. Математика – это не просто свод вечных истин и не только строго кумулятивное приобщение человека ко все большему числу этих вечных истин. В математике происходят кризисы, а значит, она время от времени проходит через состояния неопределенности и выбора (ср. греческое κρίσις, от глагола κρίνω, одно из значений которого – «определять», «выбирать»). Однако, как оказывается, хотя обычно у математики и признают наличие истории, это не обязательно означает признание *историчности* самой математики. Например, обсуждаемый миф о трех кризисах предполагает, что вечность и неизменность математики в предлагаемом понимании истории сохраняются; просто они переносятся на сам способ изменения математики, который тяготеет к тому, чтобы стать универсальным и неизменным паттерном. Подлинная историчность же, на мой взгляд, требует признать значимую, решающую непредсказуемость, а также уникальность и неповторимость конкретных событий.

Принимая или отрицая существование кризисов оснований в истории математики, важно договориться о том, что, собственно, понимается под «кризисом оснований». Такой кризис, согласно стандартному представлению, предполагает следующий паттерн, развертывающийся в *три этапа*: 1) расцвет математического творчества, эвристически богатый, но наивный период; 2) обнаружение порожденных новыми идеями логических трудностей, построение парадоксов, которые делают наивную позицию неприемлемой; их открытие вызывает удивление, испуг или даже шок; этот этап естественно сопровождается чувством беспокойства и неуверенности, а возможно, и упадком математического творчества; 3) выход на более высокий уровень строгости, на котором обнаруженные парадоксы успешно разрешаются. В ходе кризиса от наивного представления об основаниях (на этапе 1) математики переходят к более строгому и логически уточненному пониманию оснований (на этапе 3). Восприятие исторических событий через призму универсальных паттернов такого рода имеет явственный привкус гегельянства. Намек на него можно обнаружить, например, даже в рассуждениях Феликса Клейна (автора весьма чувствительного к реальной истории математики) о чередовании *творческих* периодов («периодов бурной научной продуктивности – Zeiten großer gewaltsamer Produktivität») и *критических* периодов («периодов критицизма – kritischen Perioden») в истории математики [Klein, 1926, S. 51–53; Клейн, 1989, с. 65–67]. Я постараюсь показать, что это стандартное понимание кризиса оснований плохо согласуется с доступным нам историческим материалом и не поддерживается современными исследователями как в случае с ранней греческой математикой, так и в случае с математикой Нового времени. Для этого давайте попробуем разорвать мифологический круг и посмотреть на каждый из кризисов оснований в отдельности.

**Первый кризис**

Идея кризиса оснований в доевклидовой греческой математике начала набирать популярность, по-видимому, со времен Поля Таннери, который назвал открытие несоизмеримых величин «настоящим логическим скандалом» (un véritable scandale logique) [Tannery, 1887, p. 98][2]. Классическое выражение она получила в совместной брошюре математика Хельмута Хассе и логика и философа Генриха Шольца, которая так и называлась «Кризис оснований в греческой математике» [Hasse, Scholz, 1928]. То, что идея первого кризиса в основаниях математики до сих пор сохраняет популярность, особенно удивительно, если учесть, что она была подвергнута серьезной критике как со стороны историков философии, так и со стороны историков математики еще в 1960-е и первой половине 1970-х гг.

Согласно стандартной мифологии, события выглядят приблизительно следующим образом. Возникновение кризиса связано с философскими представлениями и математической активностью Пифагора и ранних пифагорейцев. Пифагорейцы были убеждены, что «всё есть число», т.е. понимали число как первооснову всего сущего. В соответствии с этим они не сомневались, что все геометрические величины соизмеримы. Открытие несоизмеримости нанесло сокрушительный удар по этим доктринам, вызвав кризис оснований пифагорейской математики. Выход из кризиса потребовал осознания того, что арифметика не может служить основанием геометрии. Роли арифметики и геометрии поменялись. Решение состояло в подведении единого геометрического фундамента подо все математические дисциплины. В рамках этой линии мысли Евдоксом была создана новая теория пропорций, а ее итог мы имеем в «Началах» Евклида[3].

Влиятельный американский историк античной и средневековой математики Уилбур Норр обратил внимание, что концепция кризиса в доевклидовой греческой математике явственно была смоделирована по образцу кризиса в развитии математического анализа, как его видели во второй половине XIX – начале XX в. [Knorr, 1975, p. 307–308; 2001/1975, p. 123–126]. Именно из этого времени на Античность было спроецировано понятие «кризис оснований». При этом не только допускался анахронизм, но неявно предполагалось, что математика в своем развитии во все времена следует одному и тому же паттерну. За этим же предположением скрывалось глубинное убеждение в наличии у математики неизменной сущности, которая неизбежно обнаруживает себя в разные эпохи сходным образом. Норр называет этот традиционный для историка математики соблазн «платоническим уклоном (a Platonic bias)» [Knorr, 2001/1975, p. 134].

---

2 Согласно Дирку Я. Стройку, приведенные слова Таннери указывают на «*кризис* греческой математики (a *crisis* in Greek mathematics)» [Struik, 1948, p. 50; Стройк, 1969/1963, с. 60–61].

3 Ср. указанные выше произведения Френкеля и Бар-Хиллела, А.К. Сухотина и Б.Л. Яшина. Выявление и радикальная критика стандартного взгляда представлены, например, у британского историка греческой математики Дэвида Фаулера [Fowler, 1994]. Переработанная версия этой статьи включена автором во второе издание его книги [Fowler, 1999/1987, p. 356–369]. В дальнейшем я даю ссылки на исходную статью.

Практически все элементы стандартной мифологии сделались объектом разрушительной критики у современных исследователей. У Пифагора и ранних пифагорейцев, похоже, не было развитого учения о числе как базовом онтологическом принципе. Это изобретение учеников Платона – Спевсиппа, Ксенократа и Аристотеля, подхваченное и развитое позднейшими античными авторами (псевдопифагорейская литература) вплоть до пышного его расцвета у неопифагорейцев и неоплатоников [Zhmud, 2013; 2016; Жмудь, 2017; Zhmud, 2019a; 2019b]. Ближе всего из пифагорейцев к нему подходит Филолай, который говорит о том, что «все познаваемое имеет число» (фрагмент B4 из «Эклог» Стобея). Однако у Филолая (который не может, кстати, считаться ранним пифагорейцем, ведь он современник Сократа) определяющим является эпистемологический контекст, онтологический же приходится додумывать[4]. С другой стороны, само открытие несоизмеримости произошло или раньше, или одновременно с формированием специфической философии числа, поэтому оно никак не могло прийти в конфликт с последней как установившейся традицией мысли и тем самым вызвать кризис[5].

Кроме того, при определенном понимании такой философии, согласно Норру, открытие несоизмеримости вполне могло оказаться скорее аргументом «за», а не «против» нее [Knorr, 2001/1975, p. 128]. Хаффман также приходит к выводу, что открытие несоизмеримости вполне могло не создавать никаких серьезных проблем для пифагорейской философии (например, философии Филолая), поскольку она вовсе не отождествляла числа с вещами (вопреки хорошо известным утверждениям Аристотеля) [Huffman, 1993, p. 64; 1988, p. 14–19]. В самом деле, несоизмеримость предстает как строго устанавливаемое математическое соотношение определенных геометрических линий (например, стороны и диагонали квадрата или правильного пятиугольника)[6]. Несоизмеримость «зашита» в структуре правильных многоугольников и многогранников: это неустранимая часть их математического совершенства и гармонии. То, что

---

4 См. [Zhmud, 1989; Жмудь, 1991]. Более позднюю редакцию тех же мыслей см. [Жмудь, 2012, с. 336–354]. Уточняя свои утверждения о Филолае, петербургский историк античной науки Леонид Жмудь опирается на книгу американского филолога-классика, специалиста по пифагореизму Карла Хаффмана [Huffman, 1993]. О соотношении положений «все *есть* число» («так называемые пифагорейцы» у Аристотеля) и «все *имеет* число» (Филолай) см. [Huffman, 1988; 1993, p. 172–177].

5 Точную датировку открытия несоизмеримости произвести не представляется возможным. Она обычно связывается с пифагорейцами V в. до Р.Х., т.е. это произошло или до, или в то самое время, когда формировалась философия Филолая. Иногда, следуя мутным указаниям Ямвлиха и ряда других позднеантичных авторов, ее связывают с именем Гиппаса, про которого, впрочем, мало что известно. Однако Уилбур Норр приводит аргументы в пользу того, что открытие произошло где-то между 430 и 410 гг. См. [von Fritz, 1945; Burkert, 1972/1962, p. 463–465; Knorr, 1975, p. 21–22, 36–40].

6 См. реконструкцию возможных вариантов доказательства несоизмеримости – как использующих метод доказательства от противного, так и бесконечный регресс в форме антифайрезиса, т.е. метода взаимного вычитания – например, в книге Норра [Knorr, 1975, p. 21–36]. Особый интерес представляют реконструкции чисто геометрического прямого доказательства без использования рассуждений от противного [Fowler, 1999/1987, p. 74–83; Artmann, 1994; Negrepontis, Tassopoulos, 2016].

эта гармония обнаруживает себя в виде бесконечного регресса, не означает крах математического описания мира, ведь сам регресс подчинен точному математическому алгоритму. Напротив, это тот единственно возможный способ, которым число и геометрическая форма могут привнести порядок в материю или необходимость. Платон в диалоге «Тимей» делает это достаточно явным. Геометрия связана у него с *телом* космоса, в то время как арифметика – с его *душой*, которая служит посредником между разумом и телом космоса. Делимость до бесконечности есть неустранимое свойство всего телесного, а значит, и геометрического. Грани представляющих стихии правильных многогранников – квадрат и равносторонний треугольник – Платон делит на прямоугольные треугольники, причем так, что деление это может быть продолжено до бесконечности (*Timaeus* 53c-55c) [Cornford, 1935, p. 210–219, 230–239][7]. Да и Филолай, кстати, говорит, что гармония (которая тесно связана у него с числом) сопрягает «ограничивающие (περαίνοντα)» с «безграничными (ἄπειρα)» (фрагменты B1, B2 и B6 из Диогена Лаэртия и «Эклог» Стобея) [Лебедев, 1989, с. 441–442; Huffman, 1993, p. 37–77, 93, 101–102, 123–124]. Безграничное законно присутствует не только в мире геометрических фигур, но и в мире чисел: как сам ряд натуральных чисел, так и ряды простых чисел, треугольных чисел, квадратных чисел и т.п. уходят в бесконечность. Другими словами, соответствующие закономерности обнаруживают себя только в итерации ad infinitum. Здесь нет противоречия с математическим и даже числовым пониманием гармонии космоса, поскольку последнее не обязано проявлять себя исключительно в примитивной форме прямого соответствия между предметом и отдельным числом.

Как подчеркивает Фаулер, у нас нет никаких свидетельств того, что пифагорейцы в какой-то момент считали все геометрические величины соизмеримыми, а когда была открыта несоизмеримость, вынуждены были отказаться от такого представления. Естественное для нас предположение, что ранние греческие математики практиковали своего рода арифметизированную геометрию, основанную на системе понятий, близких к тому, что мы сейчас называем теорией обыкновенных дробей, по-видимому, представляет собой неоправданную модернизацию. Это предположение если и оправдано, то лишь для поздней греческой математики [Fowler, 1994, p. 222–223, 228–230]. Стандартная мифология исходит также из идеи естественного единства арифметики и геометрии, вопрос лишь в том, достигается ли это единство на основе первичности арифметики или геометрии в качестве универсального фундамента. Античные же свидетельства говорят скорее о значительной обособленности арифметики и геометрии. На это обращает внимание Аристотель, когда он подчеркивает, что арифметика и геометрия изучают *разные предметы*. Согласно Норру, использование геометрического представления чисел в некоторых областях математических исследований вовсе не превращало числа в особый подвид геометрических величин. Изменения онтологического статуса при этом не предполагалось. Например, теория пропорций строится в «Началах» Евклида отдельно для геометрических

[7] Интерпретация этого места вызывает споры [Artmann, Schäfer, 1993; Lloyd, 2006; Paparazzo, 2015].

величин (кн. V) и отдельно для чисел (кн. VII). Если бы числа были всего лишь подвидом геометрических величин, это было бы ненужным удвоением [Knorr, 1975, p. 309–312]. Яков Клейн – философ феноменологического направления, известный работами по истории математики, а также о Платоне и платонизме, – еще в 1930-е гг. настаивал на том, чтобы отказаться от насильственного подведения многообразных древнегреческих математических объектов под единое понятие общей величины. Числа представляются у Евклида с помощью линий, но идентификации при этом не происходит [Klein, 1968/1934–1936, p. 122–124]. Евгений Зайцев развил и усилил этот тезис Клейна, показав с помощью ряда реконструкций, что ранняя греческая математика была скорее объектно ориентированной, в отличие от методо-ориентированной математики Нового времени, что решительно препятствовало унификации [Zaitsev, 2018].

Главное же, у нас нет *ни одного* убедительного исторического свидетельства кризиса, т.е. появления в связи с открытием несоизмеримости характерного «кризисного сознания» («mentalité de crise», по выражению нидерландского математика Ханса Фрейденталя [Freudenthal, 1966, p. 43]), например, заметной стагнации в сфере математического творчества[8] или, на худой конец, явно выраженной тревоги и беспокойства в связи с шаткостью или недостаточной проясненностью оснований математики. Об этом писали многие. Так, анализируя попытку переноса на античную ситуацию V в. до Р.Х. представлений начала XX в. о кризисе оснований, немецкий филолог-классик Вальтер Буркерт писал: «Глубокое значение открытия [несоизмеримости], столь драматично выраженное с помощью модного словечка Grundlagenkrisis, не подтверждается свидетельством источников» [Burkert, 1972/1962, p. 462]. В подкрепление своих слов он цитирует немецкого математика и философа Курта Райдемайстера: «Ни в одном из многочисленных отрывков Платона и Аристотеля, упоминающих иррациональное, не удается обнаружить указания на скандал, хотя он, без сомнения, должен был бы быть памятен в их время» [Reidemeister, 1949, S. 30; Burkert, 1972/1962, p. 462]. Венгерский филолог-классик, философ и историк античной математики Арпад Сабо также соглашается, что «это событие, по всей вероятности, никогда не было “скандалом” для математиков» [Szabó, 1978/1969, p. 88]. Максимально близко к пониманию открытия несоизмеримости как кризиса и скандала, стоят позднеантичные рассказы о «секретности» пифагорейского сообщества, «предательском разглашении тайны» и «наказании» нечестивца за профанацию святыни, которые чаще всего связывают с именем Гиппаса. Об этом красочно повествует Ямвлих в трактате «О пифагорейской жизни» (88–89, 246–247) [Iamblichus, 1989, p. 39, 102–103; Лебедев, 1989, с. 152]. Однако воспринимать этот рассказ в качестве исторического свидетельства в пользу существования кризиса довольно трудно. Слишком уж явственна тенденциозность Ямвлиха, и легко угадываются отнюдь

[8] См. [Knorr, 1975, p. 40–41]. Присоединяясь к критике концепции первого кризиса, прозвучавшей из уст Фрейденталя и Норра, Дэвид Фаулер пишет: «Начало четвертого столетия [до Р.Х.] было периодом необычайного подъема [математического] творчества, особенно в круге Платона» [Fowler, 1994, p. 226].

не древние, а современные ему самому источники его вдохновения [Burkert, 1972/1962, p. 457–462; Freudenthal, 1966, p. 45; Fowler, 1994, p. 225–226]. Уилбур Норр подчеркивает огромное значение открытия несоизмеримости как для развития самой греческой математики, так и для ее философского осмысления, но использование для описания доевклидовой ситуации термина «кризис» считает «в лучшем случае крайне дезориентирующим (a highly misleading), если не полностью ложным» [Knorr, 2001/1975, p. 135; 1975, p. 42]. Дэвид Фаулер не только отрицает кризис, но и приводит аргументы в пользу того, что само открытие несоизмеримости было «второстепенным событием (an incidental event)» для истории ранней греческой математики [Fowler, 1994, p. 226–228]. Тезис об отсутствии античных свидетельств какого-либо кризиса, последовавшего за открытием несоизмеримости, и представление о появлении самой идеи такого кризиса в результате неоправданного проецирования на раннюю греческую математику ситуации кризиса оснований начала XX в. разделяет и Ревил Нетц, один из ведущих современных специалистов по истории античной математики из Стэнфордского университета [Netz, 2014, p. 179]. С выводами Буркерта соглашаются и современные российские исследователи [Афонасин и др., 2014, с. 58].

Отдельный интересный аспект проблемы составляет гипотеза о связи между открытием несоизмеримости и апориями Зенона из Элеи. В рамках стандартной мифологии их часто ставят рядом в качестве источников первого кризиса. На эту связь указывали еще Хассе и Шольц. Апории Зенона даже интерпретируют как изощренное разоблачение путаницы в основаниях современной ему математики. Однако наличие прямой связи между математикой и апориями Зенона вызывает большие сомнения [Freudenthal, 1966, p. 52–54]. Известный британский философ-антиковед Оуэн прямо называет такие представления «тормозящим [исследования] мифом (an obstructive myth)» [Owen, 1958, p. 212][9]. Они, безусловно, были связаны между собой, но вряд ли напрямую [Burkert, 1972/1962, p. 456]. Сомнительно, чтобы открытие пифагорейцами несоизмеримости могло повлиять на рассуждения Зенона[10], скорее уж, наоборот, диалектика Зенона и других греческих философов, а также эристика софистов повлияли на математическую традицию построения доказательств, в том числе и на способы доказательства несоизмеримости. Это лучше соответствует и уточненной хронологии событий той эпохи, если учесть, что апории Зенона были сформулированы в середине V в. или даже раньше, согласно свидетельству платоновского «Парменида». Так, Арпад Сабо стремился показать, что прием доказательства от противного, который используется при доказательстве несоизмеримости стороны и диагонали квадрата у Евклида, был заимствован математиками у диалектиков, в первую очередь Парменида и Зенона [Сабо, 1959, с. 347–350; Szabó, 1978/1969, p. 216–220]. Если же считать, вслед за Норром, что исходная версия доказательства обходилась без этого приема, то наиболее убедительный вариант ее реконструкции основан

---

9 Интересно, что Оуэн при этом все еще верит в вызванный открытием несоизмеримости «кризис в математике» [Owen, 1958, p. 214].

10 С этим, вслед за Хассе и Шольцем, согласен, например, фон Фритц [von Fritz, 1945, p. 244].

на бесконечном регрессе, который вновь заставляет вспомнить способ построения апорий Зенона [Knorr, 1975, p. 27]. Однако тот же Норр подчеркивает, что математики в период до Евклида не были столь сильно озабочены проблемами оснований, как это представляет стандартная мифология [ibid., p. 307–309]. Ревил Нетц вообще считает, что математика появляется у греков лишь во второй половине V в. до Р.Х., у Гиппократа Хиосского, Феодора из Кирены и их современников, всё предыдущее в лучшем случае донаучный фон ее возникновения. «Аргументы Зенона выглядят как математика, только в реконструкции Аристотеля», – отмечает он [Netz, 1999, p. 272–275]. Открытие несоизмеримости не могло вызвать кризис оснований уже по той простой причине, что оно современно раннему этапу возникновения самой традиции математики евклидовского типа, в то время как понятие кризиса предполагает конфликт в рамках уже сложившейся традиции.

## Список литературы


Афонасин и др., 2014 – *Афонасин Е.В., Афонасина А.С., Щетников А.И.* Пифагорейская традиция. СПб.: РХГА, 2014. 747 с.

Вейль, 1934 – *Вейль Г.* О новом кризисе основ математики // *Вейль Г.* О философии математики: Сборник работ / Пер. с нем. А.П. Юшкевича. М.; Л.: ГТТИ, 1934. С. 92–128.

Жмудь, 1991 – *Жмудь Л.Я.* «Все есть число?» (К интерпретации «основной доктрины» пифагореизма) // Mathesis: Из истории античной науки и философии / Отв. ред. И.Д. Рожанский. М.: Наука, 1991. С. 55–75.

Жмудь, 2012 – *Жмудь Л.Я.* Пифагор и ранние пифагорейцы. М.: Университет Дмитрия Пожарского, 2012. 445 с.

Жмудь, 2017 – *Жмудь Л.Я.* Греческая арифмология: Пифагор или Платон? / Пер. с англ. А.С. Афонасиной // ΣΧΟΛΗ. 2017. Т. 11. № 2. С. 428–459.

Клейн, 1989 – *Клейн Ф.* Лекции о развитии математики в XIX столетии / Пер. с нем. Н.М. Нагорного, под ред. М.М. Постникова. Т. 1. М.: Наука, 1989. 453 с.

Лебедев, 1989 – Фрагменты ранних греческих философов / Изд. подготовил А.В. Лебедев. М.: Наука, 1989. 576 с.

Сабо, 1959 – *Сабо А.* О превращении математики в дедуктивную науку и о начале ее обоснования // Историко-математические исследования. Вып. XII / Под ред. Г.Ф. Рыбкина, А.П. Юшкевича. М.: ГИФМЛ, 1959. С. 321–392.

Стройк, 1969/1963 – *Стройк Д.Я.* Краткий очерк истории математики / Пер. с нем. и доп. И.Б. Погребысского. 2-е изд. М.: Наука, 1969. 328 с.

Сухотин, 1980/1978 – *Сухотин А.К.* Парадоксы науки. 2-е изд. М.: Молодая гвардия, 1980. 239 с.

Сухотин, 2004 – *Сухотин А.К.* Философия математики: Учебное пособие. Томск: Изд-во Томского ун-та, 2004. 230 с.

Френкель, Бар-Хиллел, 1966 – *Френкель А.А., Бар-Хиллел И.* Основания теории множеств / Пер. с англ. Ю.А. Гастева, под ред. А.С. Есенина-Вольпина. М.: Мир, 1966. 556 с.

Ямпольский, 2013 – *Ямпольский М.* История как ассамбляж: Публичная лекция // Сеанс. 15.02.2013. URL: https://seance.ru/articles/yampolsky_lecture_wordorder/ (дата обращения: 21.07.2020).

Яшин, 2015/2012 – *Яшин Б.Л.* Математика в контексте философских проблем: Учебное пособие. М.: МПГУ, 2012. Переиздано: М.; Берлин: Директ-Медиа, 2015. 110 с.

Яшин, 2018 – *Яшин Б.Л.* Философские проблемы математики: история и современность: Монография. М.; Берлин: Директ-Медиа, 2018. 240 с.

Artmann, 1994 – *Artmann B.* A Proof for Theodorus' Theorem by Drawing Diagrams // Journal of Geometry. 1994. Vol. 49. P. 3–35.

Artmann, Schäfer, 1993 – *Artmann B., Schäfer L.* Plato's "Fairest Triangles" (*Timaeus* 54a) // Historia Mathematica. 1993. Vol. 20. No. 3. P. 255–264.

Burkert, 1972/1962 – *Burkert W.* Lore and Science in Ancient Pythagoreanism. Cambridge, MA: Harvard University Press, 1972. 542 p.

Cornford, 1935 – *Cornford F.M.* Plato's Cosmology: The *Timaeus* of Plato. London: Routledge & Kegan Paul, 1935. 392 p.

Fowler, 1994 – *Fowler D.H.* The Story of the Discovery of Incommensurability, Revisited // Trends in the Historiography of Science / Ed. by K. Gavroglu, J. Christianidis, E. Nicolaidis. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1994. P. 221–235.

Fowler, 1999/1987 – *Fowler D.H.* The Mathematics of Plato's Academy: A New Reconstruction. 2nd ed. Oxford: Clarendon Press, 1999. 467 p.

Fraenkel, Bar-Hillel, 1958 – *Fraenkel A., Bar-Hillel Y.* Foundations of Set Theory. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1958. 425 p.

Fraenkel, Bar-Hillel, Levy, 1973 – *Fraenkel A., Bar-Hillel Y., Levy A.* Foundations of Set Theory. 2nd rev. ed. Amsterdam: Elsevier, 1973. 414 p.

Freudenthal, 1966 – *Freudenthal H.* Y avait-il une crise des fondements des mathématiques dans l'antiquité? // Bulletin de la Société mathématique de Belgique. 1966. Vol. 18. P. 43–55.

von Fritz, 1945 – *von Fritz K.* The Discovery of Incommensurability by Hippasus of Metapontum // Annals of Mathematics. Second Series. 1945. Vol. 46. No. 2. P. 242–264.

Hasse, Scholz, 1928 – *Hasse H. und Scholz H.* Die Grundlagenkrisis der griechischen Mathematik. Charlottenburg: Pan-Verlag Kurt Metzner, 1928. 72 S.

Huffman, 1988 – *Huffman C.A.* The Role of Number in Philolaus' Philosophy // Phronesis. 1988. Vol. 33. No. 1. P. 1–30.

Huffman, 1993 – *Huffman C.A.* Philolaus of Croton, Pythagorean and Presocratic: A Commentary on the Fragments and Testimonia with Interpretive Essays. New York: Cambridge University Press, 1993. 464 p.

Iamblichus, 1989 – *Iamblichus*. On the Pythagorean Life / Trans. by G. Clark. Liverpool: Liverpool University Press, 1989. 144 p.

Klein, 1926 – *Klein F.* Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert. Teil I. Berlin: Springer, 1926. 398 S.

Klein, 1968/1934-36 – *Klein J.* Greek Mathematical Thought and the Origin of Algebra / Trans. by E. Brann. Cambridge, MA: The MIT Press, 1968. 376 p.

Knorr, 1975 – *Knorr W.R.* The Evolution of the Euclidean Elements: A Study of the Theory of Incommensurable Magnitudes and Its Significance for Early Greek Geometry. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 1975. 386 p.

Knorr, 2001/1975 – *Knorr W.R.* The Impact of Modern Mathematics on Ancient Mathematics [1975] // Revue d'histoire des mathématiques. 2001. Vol. 7. No. 1. P. 121–135.

Lloyd, 2006 – *Lloyd D.R.* Symmetry and Asymmetry in the Construction of 'Elements' in the *Timaeus* // The Classical Quarterly. New Series. 2006. Vol. 56. No. 2. P. 459–474.

Negrepontis, Tassopoulos, 2016 – *Negrepontis S., Tassopoulos G.* Theodorus' Proofs of Incommensurabilities with Gnomons // BSHM Bulletin: Journal of the British Society for the History of Mathematics. 2016. Vol. 31. No. 1. P. 15–30.

Netz, 1999 – *Netz R.* The Shaping of Deduction in Greek Mathematics: A Study in Cognitive History. Cambridge: Cambridge University Press, 1999. 345 p.

Netz, 2014 – *Netz R.* The Problem of Pythagorean Mathematics // A History of Pythagoreanism / Ed. by C.A. Huffman. Cambridge: Cambridge University Press, 2014. P. 167–184.

Owen, 1958 – *Owen G.E.L.* Zeno and the Mathematicians // Proceedings of the Aristotelian Society. New Series. 1957–1958. Vol. 58. P. 199–222.

Paparazzo, 2015 – *Paparazzo E.* It's a World Made of Triangles: Plato's *Timaeus* 53B–55C // Archiv für Geschichte der Philosophie. 2015. Vol. 97. No. 2. P. 135–159.

Reidemeister, 1949 – *Reidemeister K.* Das exakte Denken der Griechen. Leipzig: Classen & Goverts, 1949. 108 S.

Shaposhnikov, 2021 – *Shaposhnikov V.* From Speculative to Practical Foundations of Mathematics: A Communication-Centered Account // Philosophical Approaches to the Foundations of Logic and Mathematics: In Honor of Professor Stanisław Krajewski (Poznań Studies in the Philosophy of the Sciences and the Humanities. Vol. 114) / Ed. by M. Trepczyński. Leiden: Brill, 2021. P. 12–92.

Struik, 1948 – *Struik D.J.* A Concise History of Mathematics. Vol. 1. The Beginnings – The Beginnings in Western Europe. New York: Dover Publications, 1948. 141 p.

Szabó, 1978/1969 – *Szabó Á.* The Beginnings of Greek Mathematics / Trans. by A.M. Ungar. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 1978. 358 p.

Tannery, 1887 – *Tannery P.* La Géométrie grecque: comment son histoire nous est parvenue et ce que nous en savons. Essai critique. Première partie: Histoire générale de la géométrie élémentaire. Paris: Gauthier-Villars, 1887. 188 p.

Weyl, 1921 – *Weyl H.* Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik // Mathematische Zeitschrift. 1921. Bd. 10. S. 39–79.

Zaitsev, 2018 – *Zaitsev E.* The Priority of Object over Method in Early Greek Mathematics // Almagest: International Journal for the History of Scientific Ideas. 2018. Vol. 9. No. 1. P. 97–119.

Zhmud, 1989 – *Zhmud L.* "All Is Number"? "Basic Doctrine" of Pythagoreanism Reconsidered // Phronesis. 1989. Vol. 34. No. 3. P. 270–292.

Zhmud, 2013 – *Zhmud L.* Pythagorean Number Doctrine in the Academy // On Pythagoreanism / Ed. by G. Cornelli, R. McKirahan, C. Macris. Berlin: De Gruyter, 2013. P. 323–344.

Zhmud, 2016 – *Zhmud L.* Greek Arithmology: Pythagoras or Plato? // Pythagorean Knowledge from the Ancient to the Modern World: Askesis, Religion, Science / Ed. by A.-B. Renger, A. Stavru. Wiesbaden: Harrassowitz Verlag, 2016. P. 321–346.

Zhmud, 2019a – *Zhmud L.* What is Pythagorean in the Pseudo-Pythagorean Literature? // Philologus. 2019. Vol. 163. No. 1. P. 72–94.

Zhmud, 2019b – *Zhmud L.* From Number Symbolism to Arithmology // Zahlen- und Buchstabensysteme im Dienste religiöser Bildung / Hrsg. von L.V. Schimmelpfennig und R.G. Kratz. Tübingen: Mohr Siebeck, 2019. S. 25–45.

## The myth of the three crises in foundations of mathematics Part 1

***Vladislav A. Shaposhnikov***

Lomonosov Moscow State University. 27 Lomonosovsky Prospekt, bldg. 4, GSP-1, Moscow, 119991, Russian Federation; e-mail: shaposhnikov@philos.msu.ru

The story of "the three crises in foundations of mathematics" is widely popular in Russian publications on the philosophy of mathematics. This paper aims at evaluating this story against the background of the contemporary scholarship in the history of mathematics. The conclusion is that it should be considered as a specimen of modern myth-making activity brought to the fore by an unconscious tendency to model the whole history of mathematics on the pattern of the foundational crisis of the first decades of the 20th century. What is more, the consideration of the specific role and character of the foundations in both early Greek mathematics and 18th-century mathematics gives an occasion to raise a more general question regarding the true meaning of the historicity of mathematics.

The first part of this paper deals with the point whether there was a foundational crisis in pre-Euclidean Greek mathematics caused by the discovery of incommensurable magnitudes and Zeno's paradoxes. The result is negative: we have no direct historical evidence of such a crisis; as for secondary considerations, they also mainly count against it. The idea of the first crisis in foundations of mathematics has emerged as a result of the unjustified transference of the modern grasp of foundational issues and the modern "mentalité de crise" to the ancient past.

***Keywords:*** philosophy of mathematics, foundations of mathematics, discovery of incommensurability, foundational crisis, historicity

## References

Afonasin, E.V., Afonasina, A.S., Schetnikov, A.I. *Pifagoreyskaya traditsiya* [The Pythagorean Tradition]. St. Petersburg: Russian Christian Academy for the Humanities Publ., 2014. 747 pp. (In Russian)

Artmann, B., Schäfer, L. "'Plato's 'Fairest Triangles' (*Timaeus* 54a)", *Historia Mathematica*, 1993, vol. 20, no. 3, pp. 255–264.

Artmann, B. "'A Proof for Theodorus' Theorem by Drawing Diagrams", *Journal of Geometry*, 1994, vol. 49, pp. 3–35.

Burkert, W. *Lore and Science in Ancient Pythagoreanism*. Cambridge, MA: Harvard University Press, 1972. 542 pp.

Cornford, F.M. *Plato's Cosmology: The Timaeus of Plato*. London: Routledge & Kegan Paul, 1935. 392 pp.

Fowler, D.H. "The Story of the Discovery of Incommensurability, Revisited", *Trends in the Historiography of Science*, ed. by K. Gavroglu, J. Christianidis, E. Nicolaidis. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1994, pp. 221–235.

Fowler, D.H. *The Mathematics of Plato's Academy: A New Reconstruction, 2nd ed.* Oxford: Clarendon Press, 1999. 467 pp.

Fraenkel, A., Bar-Hillel, Y. *Foundations of Set Theory*. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1958. 425 pp.

Fraenkel, A., Bar-Hillel, Y. *Osnovaniya teorii mnozhestv* [Foundations of Set Theory], trans. by Yu.A. Gastev, ed. by A.S. Esenin-Volpin. Moscow: Mir Publ., 1966. 556 p. (In Russian)

Fraenkel, A., Bar-Hillel Y., Levy, A. *Foundations of Set Theory,* 2nd rev. ed. Amsterdam: Elsevier, 1973. 414 pp.

*Fragmenty rannikh grecheskikh filosofov* [The Fragments of Early Greek Philosophers], trans. and ed. by A.V. Lebedev. Moscow: Nauka Publ., 1989. 576 pp. (In Russian)

Freudenthal, H. "Y avait-il une crise des fondements des mathématiques dans l'antiquité?", *Bulletin de la Société mathématique de Belgique*, 1966, vol. 18, pp. 43–55.

Hasse, H. und Scholz, H. *Die Grundlagenkrisis der griechischen Mathematik*. Charlottenburg: Pan-Verlag Kurt Metzner, 1928. 72 S.

Huffman, C.A. "The Role of Number in Philolaus' Philosophy," *Phronesis*, 1988, vol. 33, no. 1, pp. 1–30.

Huffman, C.A. *Philolaus of Croton, Pythagorean and Presocratic: A Commentary on the Fragments and Testimonia with Interpretive Essays*. New York, NY: Cambridge University Press, 1993. 464 pp.

Iamblichus. *On the Pythagorean Life*, trans. by G. Clark. Liverpool: Liverpool University Press, 1989. 144 pp.

Iampolski, M.B. "Istoriya kak assamblyazh: Publichnaya lektsiya" [History as an Assemblage: A Public Lecture], *Seans Magazine*, 15.02.2013 [https://seance.ru/articles/yampolsky_lecture_wordorder/, accessed on 21.07.2020]. (In Russian)

Klein, F. *Lektsii o razvitii matematiki v XIX stoletii* [Lectures on the Development of Mathematics in the 19th Century], trans. by N.M. Nagorny, ed. by M.M. Postnikov, vol. 1. Moscow: Nauka Publ., 1989. 453 pp. (In Russian)

Klein, F. *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert*, teil I. Berlin: Springer, 1926. 398 S.

Klein, J. *Greek Mathematical Thought and the Origin of Algebra*. Cambridge, MA: The MIT Press, 1968. 376 pp.

Knorr, W.R. "The Impact of Modern Mathematics on Ancient Mathematics [1975]", *Revue d'histoire des mathématiques*, 2001, vol. 7, no. 1, pp. 121–135.

Knorr, W.R. *The Evolution of the Euclidean Elements: A Study of the Theory of Incommensurable Magnitudes and Its Significance for Early Greek Geometry*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 1975. 386 pp.

Lloyd, D.R. "Symmetry and Asymmetry in the Construction of 'Elements' in the *Timaeus*," *The Classical Quarterly*, New Series, 2006, vol. 56, no. 2, pp. 459–474.

Negrepontis, S., Tassopoulos, G. "'Theodorus' Proofs of Incommensurabilities with Gnomons," *BSHM Bulletin: Journal of the British Society for the History of Mathematics*, 2016, vol. 31, no. 1, pp. 15–30.

Netz, R. "The Problem of Pythagorean Mathematics", in: *A History of Pythagoreanism*, ed. by C.A. Huffman. Cambridge: Cambridge University Press, 2014, pp. 167–184.

Netz, R. *The Shaping of Deduction in Greek Mathematics: A Study in Cognitive History*. Cambridge: Cambridge University Press, 1999. 345 pp.

Owen, G.E.L. "Zeno and the Mathematicians", *Proceedings of the Aristotelian Society*, New Series, 1957–1958, vol. 58, pp. 199–222.

Paparazzo, E. "It's a World Made of Triangles: Plato's *Timaeus* 53B–55C", *Archiv für Geschichte der Philosophie*, 2015, vol. 97, no. 2, pp. 135–159.

Reidemeister, K. *Das exakte Denken der Griechen*. Leipzig: Classen & Goverts, 1949. 108 S.

Shaposhnikov, V. "From Speculative to Practical Foundations of Mathematics: A Communication-Centered Account", *Philosophical Approaches to the Foundations of Logic and Mathematics: In Honor of Professor Stanisław Krajewski (Poznań Studies in the Philosophy of the Sciences and the Humanities. Vol. 114)*, ed. by M. Trepczyński. Leiden: Brill, 2021, pp. 12–92.

Struik, D.J. *A Concise History of Mathematics, vol. I: The Beginnings – The Beginnings in Western Europe*. New York: Dover Publications, 1948. 141 pp.

Struik, D.J. *Kratkiy ocherk istorii matematiki* [*A Concise History of Mathematics*], trans. and appendix by I.B. Pogrebyssky. 2nd ed. Moscow: Nauka Publ., 1969. 328 pp. (In Russian)

Sukhotin, A.K. *Filosofiya matematiki: Uchebnoe posobie* [Philosophy of Mathematics: A Textbook]. Tomsk: Tomsk University Press, 2004. 230 pp. (In Russian)

Sukhotin, A.K. *Paradoksy nauki* [Paradoxes of Science], 2nd. ed. Moscow: Molodaya Gvardiya Publ., 1980. 239 pp. (In Russian)

Szabó, Á. "O prevrashchenii matematiki v deduktivnuyu nauku i o nachale ee obosnovaniya" [How Mathematics Became a Deductive Science and Foundational Studies Began], in: *Istoriko-matematicheskie issledovaniya* [Historical-Mathematical Studies], 1959, vol. XII, ed. by G.F. Rybkin, A.P. Yushkevich. Moscow: State Physico-Mathematical Publ., 1959, pp. 321–392. (In Russian)

Szabó, Á. *The Beginnings of Greek Mathematics*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 1978. 358 pp.

Tannery, P. *La Géométrie grecque: comment son histoire nous est parvenue et ce que nous en savons. Essai critique. Première partie: Histoire générale de la géométrie élémentaire*. Paris: Gauthier-Villars, 1887. 188 pp.

von Fritz, K. "The Discovery of Incommensurability by Hippasus of Metapontum", *Annals of Mathematics*, Second Series, 1945, vol. 46, no. 2, pp. 242–264.

Weyl, H. “O novom krizise osnov matematiki [On the New Foundational Crisis of Mathematics]”, in: Weyl, H. *O filosofii matematiki: sbornik rabot* [On the Philosophy of Mathematics: Selected Works], trans. by A.P. Yushkevich. Moscow–Leningrad: State Techno-Theoretical Publ., 1934, pp. 92–128. (In Russian)

Weyl, H. “Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik”, *Mathematische Zeitschrift*, 1921, Bd. 10, S. 39–79.

Yashin, B.L. *Filosofskie problemy matematiki: istoriya i sovremennost’* [Philosophical Problems of Mathematics: History and the Present]. Moscow–Berlin: Direct-Media Publ., 2018. 240 pp. (In Russian)

Yashin, B.L. *Matematika v kontekste filosofskikh problem: Uchebnoe posobie* [Mathematics in the Context of Philosophy: A Textbook]. Moscow: MSPU University Press, 2012. Reprinted: Moscow–Berlin: Direct-Media Publ., 2015. 110 pp. (In Russian)

Zaitsev, E. “The Priority of Object over Method in Early Greek Mathematics”, *Almagest: International Journal for the History of Scientific Ideas*, 2018, vol. 9, no. 1, pp. 97–119.

Zhmud, L. “‘Vse est’ chislo?’ (K interpretatsii ‘osnovnoy doktriny’ pifagoreizma)” [“All is Number?” Towards an Interpretation of the “Basic Doctrine” of Pythagoreanism], in: *Mathesis: Iz istorii antichnoy nauki i filosofii* [Mathesis: From the History of Ancient Science and Philosophy], ed. by I.D. Rožanskij. Moscow: Nauka Publ., 1991, pp. 55–75. (In Russian)

Zhmud, L. “From Number Symbolism to Arithmology”, in: *Zahlen- und Buchstabensysteme im Dienste religiöser Bildung*, Hrsg. von L.V. Schimmelpfennig, R.G. Kratz. Tübingen: Mohr Siebeck, 2019, pp. 25–45.

Zhmud, L. “Grecheskaya arifmologiya: Pifagor ili Platon? [Greek Arithmology: Pythagoras or Plato?]”, trans. by A.S. Afonasina, *ΣΧΟΛΗ*, 2017, vol. 11, no. 2, pp. 428–459. (In Russian)

Zhmud, L. “Greek Arithmology: Pythagoras or Plato?”, in: *Pythagorean Knowledge from the Ancient to the Modern World: Askesis, Religion, Science*, ed. by A.-B. Renger, A. Stavru. Wiesbaden: Harrassowitz Verlag, 2016, pp. 321–346.

Zhmud, L. “Pythagorean Number Doctrine in the Academy”, in: *On Pythagoreanism*, ed. by G. Cornelli, R. McKirahan, C. Macris. Berlin: De Gruyter, 2013, pp. 323–344.

Zhmud, L. “What is Pythagorean in the Pseudo-Pythagorean Literature?”, *Philologus*, 2019, vol. 163, no. 1, pp. 72–94.

Zhmud, L. *Pifagor i rannie pifagoreytsy* [Pythagoras and the Early Pythagoreans]. Moscow: Dmitry Pozharsky University Press, 2012. 445 pp. (In Russian)

Zhmud, L. “‘All Is Number?’ ‘Basic Doctrine’ of Pythagoreanism Reconsidered”, *Phronesis*, 1989, vol. 34, no. 3, pp. 270–292.