Философия науки и техники
2021. Т. 26. № 2. С. 81–95
УДК 168.51

Philosophy of Science and Technology
2021, vol. 26, no. 2, pp. 81–95
DOI: 10.21146/2413-9084-2021-26-2-81-95

ТЕОРИЯ И МЕТОДОЛОГИЯ НАУКИ И ТЕХНИКИ

В.А. Шапошников

Миф о трех кризисах в основаниях математики Часть 2

Шапошников Владислав Алексеевич – кандидат философских наук, доцент. Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова. Российская Федерация, 119991, ГСП-1, г. Москва, Ломоносовский проспект, д. 27, корп. 4; e-mail: shaposhnikov@philos.msu.ru

В отечественной литературе по философии математики большой популярностью пользуется повествование о «трех кризисах в основаниях математики». В настоящей статье делается попытка оценить состоятельность этого представления, опираясь на современные исследования по истории математики. В итоге делается вывод, что в данном случае мы имеем дело не столько с заслуживающей серьезного отношения историко-философской концепцией, сколько с плодом современного мифотворчества, порожденным неосознанным стремлением исследователей рассматривать всю историю математики по образцу первых десятилетий XX в., известных как «кризис оснований». Кроме того, обсуждение характера и роли оснований в ранней греческой математике и в математике XVIII в. дают удачный повод для постановки более общего вопроса о смысле «историчности» математики. В первой части статьи была показана безосновательность убеждения в существовании «первого кризиса», а именно кризиса оснований в доевклидовой греческой математике, вызванного открытием несоизмеримости. Во второй части статьи главным образом рассматривается ситуация XVIII – начала XIX в., предполагаемая эпоха «второго кризиса», который обычно связывают с путанностью и непроясненностью оснований математического анализа. Делается вывод, что несмотря на наличие определенных проблем в области основных понятий анализа, никаких свидетельств «кризиса оснований» в математике XVIII в. мы не обнаруживаем, и приводятся соображения о вероятных причинах его отсутствия. Кризисное сознание обнаруживается лишь в XIX в., в эпоху второй научной революции. Показывается, что породившие это сознание культурные процессы тождественны с теми, что отвечают и за кризис начала XX в. Другими словами, второй и третий «кризисы» на деле оказываются этапами одного и того же единственного кризиса оснований. В итоге вместо трех кризисов остается только один.

Ключевые слова: философия математики, основания математики, связь математики и физики, математика и теология, кризис оснований, историчность

«Второй кризис»

Обсуждение оснований математики в XVIII в. вращалось в основном вокруг онтологических вопросов: можно ли сказать, что бесконечно малые величины, воображаемые величины или отрицательные величины действительно существуют? Философия математики той эпохи колебалась между крайностями математического *реализма* и математического *фикционализма*. Для первой из названных позиций математические объекты некоторым образом существуют как в природном мире, так и в уме Бога. Для второй – они есть придуманные людьми фикции, подобные персонажам великой литературы или искусства, которые могут оказываться в разной степени полезными или бесполезными. Когда люди спрашивали, являются ли математические теории *истинными* или *надежными*, они держали в уме эту дилемму. Как хорошо известно, Джордж Беркли назвал флюксии Ньютона «призраками исчезнувших величин (the Ghosts of departed Quantities)» [Berkeley, 1992/1734, p. 199; Беркли, 1978/1734, с. 426]. Эти его слова следует интерпретировать на указанном только что фоне. Корректность применяемых математиками методов также служила предметом живых обсуждений, но и здесь речь шла о выборе некоторой промежуточной позиции между двумя крайностями: приверженностью строгим геометрическим методам древних и стандартам аристотелевской логики (на одном полюсе), и увлечением на свой страх и риск практически эффективными, но плохо обоснованными новейшими аналитическими методами (на другом полюсе). Как пишет по данному поводу специалист по Ньютону, итальянский историк математики Никколо Гвиччардини: «В восемнадцатом веке проблема оснований не существовала в том смысле, в котором мы ее сейчас понимаем. Математики были в большей степени заняты определением “принципов” анализа. Они были озабочены онтологическим статусом объектов анализа и корректностью методов анализа в соответствии со стандартами аристотелевской логики» [Guicciardini, 1989, p. 38].

С одной стороны, базовые понятия и основополагающие принципы их науки широко обсуждались математиками XVIII столетия [Boyer, 1959, ch. VI]. С другой, они не проявляли серьезного беспокойства в связи с отсутствием общепринятого решения проблемы оснований. У нас нет свидетельств того, что математики первой половины и середины XVIII в. считали свою дисциплину находящейся в кризисе. Они, конечно же, прекрасно знали о наличии определенных неясностей, относящихся к базовым понятиям математики, например, понятию бесконечно малой величины. Тем не менее это не подрывало в какой-либо заметной степени их профессиональной уверенности в себе. Они были убеждены, что более полное и детализированное «рассмотрение оснований (Account of the Grounds)»[1] без сомнения устранит пока еще имеющиеся здесь проблемы.

---

[1] Это слова Колина Маклорена из его *Treatise of Fluxions* (1742). Цит. по: [Guicciardini, 1989, p. 47].

По-видимому, неясности в области метафизики частично компенсировались за счет успешной применимости математических теорий к физическому миру. Более того, для математиков той эпохи, похоже, не существовало разрыва или хотя бы четкого разделения между физическими и математическими сущностями [Daston, 1988, p. 221–224; Shaposhnikov, 2014, p. 189–193]. Гвиччардини пишет: «Интеллектуальным фоном для британских математиков служил эмпиризм. <…> И хотя никто не пытался развить эмпирическую методологию математики, как-то само собой подразумевалось, что и математика должна обладать определенным эмпирическим основанием» [Guicciardini, 1989, p. 39]. Эти слова в значительной степени верны и для континентальной Европы. Названный разрыв между физическим и математическим, если он вообще существовал, был успешно замаскирован благодаря широкой популярности «наивного абстракционизма». С помощью этого выражения британский историк математики Джереми Грей обозначает «ту идею, что математика имеет дело с идеализациями привычных объектов» [Gray, 1992, p. 228]. Классический образчик такого наивного абстракционизма можно найти в «Discourse préliminaire» Даламбера [Diderot, D'Alembert, 1751, p. iv–vii; D'Alembert, 1995/1751, p. 16–25; Даламбер, 1994/1751, с. 62–67]. Стоит отметить, что Даламбер постоянно говорит в этом тексте об «абстракциях (les abstractions mathématiques)», а не «идеализациях», в отличие от данного Греем определения наивного абстракционизма. Оба понятия тесно связаны, хотя и не тождественны. Желая проиллюстрировать свое определение, Грей цитирует одну из более поздних работ Даламбера, в которой речь уже явно идет об идеализации: «В природе, например, уж точно нет совершенного круга, но чем более она приближается к этому состоянию, тем точнее и строже ее свойства есть свойства совершенного круга, которые устанавливает геометрия»[2]. В итоге интересующий нас сейчас вывод не зависит от отмеченного различия терминов: не только простая *абстракция*, т.е. мысленное отделение свойств, но даже *идеализация*, т.е. переход от несовершенного к совершенному, не создает разрыва между областями физического и математического, ведь природа, как полагали в ту эпоху, способна предоставить нам все промежуточные степени совершенства.

Математика в общем и целом понималась в XVIII в. как изучение «величин»[3], что делало почти незаметным переход от физических вопросов к вопросам математическим и обратно. Даламбер делит «науку о природе» на «физику» и «математику». «Физика» имеет дело с некоторыми общими свойствами тел, такими как «протяженность», «движение» и «непроницаемость», а также их видоизменениями, такими как «длительность», «упругость» или «текучесть». Он пишет в «Детальном объяснении системы человеческих знаний (Explication détaillée du systeme des connoissances humaines)»: «*Величина*, другое более общее свойство тел, которое предполагает все остальные, образует предмет математики. Мы называем *величиной* (*quantité* ou *grandeur*) все, что может

---

[2] Из работы Даламбера «Géométrie» (1785). Цит. по: [Gray, 1992, p. 228–229].

[3] Я предпочитаю переводить здесь французское «la quantité» как «величина», а не как «количество», поскольку это лучше соответствует употреблению этого слова Даламбером. Не случайно он указывает в качестве синонима слово «grandeur» (см. далее по тексту).

быть увеличено или уменьшено. *Величина*, объект *математики*, может рассматриваться или сама по себе и независимо от реальных и абстрактных индивидуальных вещей, из которых знание о ней и приобретается, или она может рассматриваться в этих реальных и абстрактных сущих, или она может рассматриваться в их действиях, которые исследуются в соответствии с реальными или предполагаемыми причинами; это размышление приводит к разделению *математики* на *чистую математику*, *смешанную математику* и *физико-математику*» [Diderot, D'Alembert, 1751, p. xlix; D'Alembert, 1995/1751, p. 152]. Как видим, согласно Даламберу, и физика, и математика имеют дело с природными телами и их свойствами. Реальные природные предметы и явления (Солнце, Луна, звезды, воздух, огонь, земля, вода, дождь, снег, гром и молния, а также все, что описывает естественная история – минералы, растения и животные) соседствуют с абстракциями (цвет, звук, вкус, запах, плотность и разреженность, тепло и холод, мягкость и твердость, прочность, текучесть, упругость, тяжесть и легкость, а также форма, расстояние, движение и покой, длительность, протяженность, величина и непроницаемость). Так же как абстракции не отрываются у Даламбера до конца от конкретных природных вещей, физика и математика образуют, при таком подходе, одно целое.

Даламбер не был исключением. Ньютон был убежден, что его флюенты и флюксии имеют «существование в природе»[4]. Маклорен основывал свое построение математического анализа на своего рода кинематической геометрии, для которой пространство, время, движение и скорость были исходными понятиями[5]. Когда Леонард Эйлер иллюстрировал различие между «постоянными величинами» и «переменными величинами» (это математическое различие) с помощью «полета ядра, вытолкнутого из орудия силой пороха» (физическое событие), он не испытывал никаких трудностей в переходе от *физических* величин – количества пороха, угла возвышения орудия над горизонтом, дальности полета ядра, длительности полета ядра, длины орудийного ствола, веса ядра и взрывной силы или силы толчка – к *математическим* величинам, таким как постоянная, переменная, функция (как переменные величины зависят друг от друга), приращение переменной, отношение приращений, исчезающее приращение или дифференциал, и т.д. вплоть до построения полного аппарата дифференциального и интегрального исчислений[6].

С другой стороны, например, Дени Дидро, главный редактор знаменитой «Энциклопедии», который в молодости достаточно сил и времени уделял математическим исследованиям, постепенно склонялся к фикционалистскому истолкованию [Krakeur, Krueger, 1941; Dahmen, 2015, p. 337–343]. Он подчеркивал сугубо человеческий характер математики: «Вся математическая наука, – писал он, – полна тех ошибок (faussetés), за которые месье Даламбер порицает анализ вероятностей. Откуда берутся несоизмеримости? Невозможность

---

4 *Tractatus de quadratura curvarum* (1704). Цит. по: [Guicciardini, 1989, p. 51].

5 В *Treatise of Fluxions* (1742). См.: [Guicciardini, 1989, p. 49–51].

6 См. предисловие Эйлера к *Institutiones Calculi Differentialis* (1755) [Euler, 2000/1755, p. v–vii; Эйлер, 1949/1755, с. 37–39].

спрямлений и квадратур?[7] Это басня о Дедале. Человек создал лабиринт и в нем заблудился» [Diderot, 1875/1761, p. 203]. В работе «Мысли к истолкованию природы (Pensées sur l'interprétation de la nature, 1754)» Дидро писал, что «математические науки, являющиеся в наибольшей степени трансцендентными (transcendantes), без опыта не приводят ни к чему точному, это своего рода общая метафизика, где тела лишены своих индивидуальных качеств» [Дидро, 1986, с. 334]. В других произведениях он замечает, что математические абстракции есть нечто *оторванное* от физических объектов, поэтому «всякая абстракция есть лишь знак без идеи (toute abstraction n'est qu'un signe vide d'idée)» («Сон Даламбера», 1769 [там же, с. 435]), и утверждает, что все теоремы геометров есть не более, чем «тождества (identiques)», на разные лады повторяющие то, что содержится в определениях объектов («Письмо о слепых, предназначенное зрячим», 1749 [там же, с. 321]). Математика есть для него *интеллектуальная игра*, что делает ее ближе к метафизике, чем к опытному познанию природы: «Мне не известно, существует ли какая-нибудь связь между способностью к игре (l'esprit du jeu) и математическим гением; но есть большое сходство между игрой и математическими науками. Если, с одной стороны, не принимать во внимание неуверенность в исходе игры, зависящем от случая, и, с другой стороны, сравнить эту неуверенность с неопределенностью, связанной с абстрактным характером математики, то партию игры можно рассматривать как неопределенный ряд проблем, подлежащих решению на основании данных условий. Нет таких математических проблем, к которым было бы неприложимо это определение, и *предмет* (chose) математики существует в природе не в большей мере, чем предмет игры. И здесь и там это дело соглашения (une affaire de conventions). Когда геометры обесславили метафизиков, они и не предполагали, что вся их собственная наука не что иное, как метафизика» («Мысли к истолкованию природы» [там же, с. 334–335]). В этой связи он предрекал грядущий упадок математических наук. Подобные нападки скептиков, однако, не слишком-то смущали большинство математиков. Недостаточная ясность базовых понятий (параллельные прямые, бесконечность, отрицательные и мнимые величины) не подрывала их веры в совершенную достоверность (d'une certitude parfaite) математики. В подтверждение правильности такого подхода Лазар Карно приводит ставшие широко известными слова Даламбера: «идите вперед, и вера придет к вам (allez en avant, et la foi vous viendra)» [Carnot, 1803, p. 480–481].

Ситуация начала меняться на рубеже XVIII и XIX вв. Намного более высокая осведомленность о возможном наличии глубинных проблем в существующей математике и соответствующий ей уровень беспокойства и даже страх [Gray, 2004, p. 25–27], который в итоге привел к «новому отношению к осно-

---

7 Говоря о «спрямлениях и квадратурах (des rectifications et des quadratures)», Дидро имеет в виду задачи вычисления длины кривой линии и нахождения площади под участком кривой линии. К тому времени уже было известно, что первая задача всегда сводима ко второй, т.е. к взятию некоторого интеграла (например, Hendrick van Heuraet, 1659). Правда, далеко не все интегралы «берутся», т.е. выразимы с помощью элементарных функций; приходится применять приближенные методы для их вычисления.

ваниям математики» [Bottazzini, 1986/1981, p. 90][8], можно обнаружить у ведущих математиков XIX в., и это составляет очевидный контраст с умонастроениями предыдущей эпохи. Не только математика, но и все научное предприятие в некотором смысле получило новое начало на рубеже столетий [Gray, 2004, p. 24]. Эта новая ситуация была удачно схвачена в термине «вторая научная революция» [Kuhn, 1977, p. 218, 220, 147; Hahn, 1971, p. 275].

Во-первых, изменился социальный статус математиков. Они перестали быть независимыми исследователями или академиками и стали, в своем большинстве, преподавателями технических школ и университетов[9]. Объединение научных исследований и образовательных задач определяют собой лицо крупнейших математических центров XIX в. Это так для Парижской политехнической школы конца XVIII – первой половины XIX в. (Г. Монж, Ж.-Л. Лагранж, П.-С. Лаплас, Ж.-Б. Фурье, С.Д. Пуассон, О.-Л. Коши, Ж.-В. Понселе и Г.-Г. Кориолис), для которой единство анализа, его приложений к геометрии, механики, математической физики и инженерных задач было естественно в продолжение традиции XVIII в. Это так для Берлинского университета второй половины XIX в. (Э.Э. Куммер, К. Вейерштрасс и Л. Кронекер), напротив, вдохновлявшегося неогуманистическими идеалами и самостоятельной ценностью чистой математики, которой только и должно заниматься в Университете, оставляя прикладные и инженерные вопросы техническим школам[10]. Это так и для Гёттингенского университета в эпоху Ф. Клейна и Д. Гильберта (1890-е – 1910-е гг.), ратовавших за возвращение к гармоническому единству чистой и прикладной математики, а также математики и физики [Ferreirós, 2016, p. 225–227]. Во всех трех случаях стремление к большей строгости во многом определялось «дидактическими целями» [Bottazzini, 1986/1981, p. 91].

Во-вторых, XIX в. был периодом «все возрастающего отделения математики от физики» [Gray, 2004, p. 37], равно как и *абстрактной или чистой* математики, т.е. анализа, включавшего арифметику и алгебру, – от *конкретной* математики, т.е. геометрии и механики [Bottazzini, 1986/1981, p. 91]. Только во второй половине XIX в. стали предприниматься усилия по переосмыслению геометрии с целью вернуть ее в лоно чистой математики («Эрлангенская программа» Ф. Клейна и далее). Вследствие этого онтологический статус математических объектов стал еще более запутанным, так что такие стандартные подходы, как наивный абстракционизм или кантовский трансцендентализм, оказались уже неспособными (по крайней мере, без существенной модификации) убедительно соответствовать новой ситуации [Gray, 1992].

Наконец, в-третьих, математика, вместе с другими науками, оказалась отделенной от христианской теологии, которую перестали считать подлинной

---

8 Главным примером для итальянского историка математики Умберто Ботазини служат письма Нильса Хенрика Абеля от 1826 г.

9 См. описание этой перемены на примере Ж.-Л. Лагранжа [Belhoste, 2014, p. 25–34]. Детальный анализ происходивших изменений см.: [Hahn, 1971, ch. 9–10; Бен-Дэвид, 2014/1971, гл. 6–7; Сокулер, 2001, гл. 5].

10 О связи неогуманизма, гумбольдтианской концепции всестороннего образования и идеала математики как чистого искусства см.: [Ferreirós, 2016, p. 216–225; 2007, pp. 245–253; Jahnke, 1990; Pyenson, 1983].

наукой[11]. Это произошло именно в течение долгого XIX в. по мере усиления секулярных и сциентистских настроений в Европе. Если еще в энциклопедии Дидро и Даламбера (1751) место метафизики и теологии на вершине иерархии наук оставалось незыблемым («Système figure» [D'Alembert, 1995/1751, p. 144–145]), то в самой популярной в XIX в. классификации наук, – вышедшей из-под пера создателя позитивизма Огюста Конта, бывшего студента (правда, не окончившего курс), а позднее репетитора (répétiteur) и экзаменатора (exaininateur d'admission) по анализу и механике Парижской политехнической школы[12], – они исключены, а их место на вершине иерархии занимает математика, а на вершине математики располагается анализ (le calcul), т.е. чистая математика. Конт называет математический анализ «истинной рациональной основой всей системы нашего позитивного знания (la véritable base rationnelle du système entier de nos connaissances positives)» и «первой и наиболее совершенной из всех фундаментальных наук (la première et la plus parfaite de toutes les sciences fondamentales)», которая работает с «самыми универсальными, самыми абстрактными и самыми простыми (les plus universelles, les plus abstraites et les plus simples)» из доступных нам идей [Comte, 1934/1830, p. 79]. Собственно, в этом изгнании из системы наук теологии и метафизики и заключается смысл его знаменитого закона трех стадий (la loi des trois états). В Германии фактически эту же мысль приписывают математику номер один того времени – К.Ф. Гауссу: «математика – царица наук, а арифметика – царица математики (die Mathematik ist die Königin der Wissenschaften und die Arithmetik die Königin der Mathematik)»[13]. Традиционно «царицей наук (regina scientiarum)» называли теологию, теперь этот титул перешел к чистой математике [Zakai, 2007]. В Великобритании и США сходные процессы, по-видимому, шли достаточно медленно, а связь веры в мощь математики с христианским богословием сохранялась дольше, вплоть до 1860-х – 1870-х гг. [Cohen, 2007]. Так же и подъем чистой математики произошел в Великобритании сравнительно поздно, лишь в самом конце XIX – первой половине XX в. (характерная фигура – Г.Х. Харди, атеист и апологет математики без приложений) [Heard, 2019].

Важно заметить, что математика не просто оказалась на том месте в системе знаний, которое раньше занимали метафизика и теология, но на нее частично оказались перенесены те представления и ожидания, которые ранее напрямую связывались именно с ними, а с ней – лишь косвенно. Теологически фундированная математика Кеплера, Галилея, Декарта и Лейбница сменяет-

---

11 Причины важности этого события для развития математики и ее философии в XIX в. я подробно обсуждаю в другом месте [Shaposhnikov, 2016a, p. 33–35], здесь же ограничусь лишь краткими пояснениями.

12 Следует отметить, что Огюст Конт был человеком чрезвычайно конфликтным и психически неустойчивым. Его широчайшая эрудиция сочеталась порой с безграмотностью в деталях. Возможно, именно поэтому карьера его в École Polytechnique была не слишком успешной [Pickering, 2007]. Однако общие настроения своего времени Конт уловил и выразил с редкой точностью.

13 Источник этих знаменитых слов – воспоминания о Гауссе фон Вальтерсхаузена [von Waltershausen, 1856, S. 79].

ся математикой в роли новой «секулярной теологии». При этом сохранение унаследованного от средних веков представления об *иерархичности* научных знаний приводит к *автономизации* чистой математики: все остальные науки зависят от нее, она же сама зависит только от себя самой, их взаимоотношения лишены симметрии. В итоге, математика по-прежнему *абсолютизируется* (вера в ее необходимость и строгую всеобщность, достоверность и универсальную применимость), но одновременно возникает острая потребность в имманентном обосновании этих ее абсолютных претензий, ведь чисто метафизические и тем более теологические аргументы отныне утратили свою законность. В том числе и из этого источника проистекает острый и неповторимо нюансированный интерес к основаниям математики в XIX и начале XX в. В определенном смысле кризис оснований математики начала XX в. повторяет кризис оснований метафизики, зафиксированный в критической философии Канта чуть более чем за сто лет до этого [Kovač, 2008].

Следует отдать должное Френкелю и Бар-Хиллелу: они отнесли «второй кризис» к началу XIX в., а не к XVII или XVIII столетиям [Fraenkel, Bar-Hillel, 1958, p. 15]. Может показаться, что этот «второй кризис», без сомнения, отличен от «третьего», ведь они разделены во времени примерно столетием. Кроме того, первый из них был вызван неясностью и шаткостью оснований анализа, в то время как второй – теоретико-множественными и логическими парадоксами. Тем не менее, на мой взгляд, их следует трактовать как последовательные стадии *одного и того же* кризиса. Такая трактовка вовсе не является новой и неожиданной. Например, известный испанский историк математики Хосе Ферейрос пишет: «Кризис оснований обычно понимают как относительно локализованное событие, относящееся к 1920-м гг., как жаркую полемику между сторонниками “классической” математики (в смысле конца девятнадцатого века), во главе с Гильбертом, и их критиками, которые защищали необходимость радикального пересмотра традиционных представлений, во главе с Брауэром. Имеется, однако, второй, и, с моей точки зрения, очень важный смысл, в котором “кризис” представлял собой длительный и глобальный процесс, неотличимый от возникновения современной математики и тех философских и методологических проблем, которые она породила» [Ferreirós, 2008, p. 142]. На мой взгляд, период возникновения современной математики вполне оправданно продлить в прошлое за пределы последних трех десятилетий XIX в., которые, по-видимому, только и имеет в виду Ферейрос, практически на всё столетие. Подобную позицию можно найти у Джереми Грея, который пишет: «Эта революция девятнадцатого века напоминает [первую] научную революцию, которую Баттерфилд описывал как долгую, медленную и лишенную обладающего определенной программой организованного руководства, напоминает более, чем приводимые Куном примеры. <…> Отстаиваемая мной точка зрения состоит в том, что к тому времени [эпохе Брауэра, Гильберта и Гёделя] революция уже давно совершилась, а шумиху произвели уже ее последствия» [Gray, 1992, p. 245–246]. На более глубоком уровне этот долгий кризис XIX в. был вызван попыткой обрести абсолютные и одновременно автономные основания математики, попыткой, которая неизбежно должна была закончиться провалом [Shaposhnikov, 2016a].

«Третий кризис»

Как видим, «три кризиса» оказываются мифом по той простой причине, что они есть порождение стремления рассматривать различные эпохи в истории математики по одному и тому же лекалу. В этой статье я хотел сказать только, что ни в античности, ни в XVII–XVIII вв. в математике не было кризиса *в том же самом смысле*, в котором говорят о кризисе в отношении математики XIX – первых десятилетий XX вв. Может быть, тогда и «третьего кризиса» не было? Может быть, и не было. Имеется ли хотя бы здесь стандартный трехэтапный паттерн, о котором мы говорили вначале? На этот вопрос, как мне представляется, не так просто дать однозначный ответ. Ведь, как неоднократно указывалось, логические и теоретико-множественные парадоксы, которые традиционно считаются источником кризиса оснований, никогда всерьез не ставили под угрозу основной массив математических результатов, равно как и их применимость к описанию физического мира[14]. Так же и знаменитые «ограничительные» теоремы Курта Гёделя и других не слишком-то «ограничили» творческую активность т.н. «работающих математиков». Ничего похожего на стагнацию математических исследований в то время не наблюдалось; эпоха «третьего кризиса» была, напротив, эпохой невиданного ранее расцвета математического творчества. Можно даже сказать, что математика в современном смысле сформировалась именно тогда, в течение очень долгого XIX в., т.е. с последних десятилетий XVIII в. до первых десятилетий XX в. включительно.

Основной конфликт, который и подразумевал Герман Вейль в 1921 г., говоря о «новом кризисе оснований», имел в своей основе противостояние двух конкретных математиков: Давида Гильберта и Л.Э.Я. Брауэра. У каждого из них были свои, причем, не столько математические, сколько философские соображения, заставлявшие их считать, что с основаниями математики не все благополучно и ситуация кризисная [Shaposhnikov, 2016b, p. 152–164]. В этом смысле можно было бы увидеть этот «кризис» всего лишь как частный конфликт двоих, пусть и очень известных и влиятельных, математиков. Однако конфликт этот произвел достаточно большие, хотя и не всеобъемлющие, волны в математическом сообществе неспроста. Гильберт представлял в этом споре не просто свою личную позицию и даже не просто Гёттинген как математический центр с международным влиянием. Он представлял движение за «концептуальную математику (begriffliche Mathematik)», блестящим примером которой была теория трансфинитов Георга Кантора. Это был новый способ математической работы, который Герман Минковский назвал «другим принци-

14 Ср.: [Potter, 2004, p. 26–27]. См. также рассуждения Витгенштейна на эту тему [Wittgenstein, 2005/1933–1937, p. 380–381; Wittgenstein, 1976/1939, p. 199–230]. Курт Гёдель в 1947 г. также писал, что с математической точки зрения теоретико-множественные парадоксы «не порождают никаких проблем (cause no trouble at all)». В переработанной версии того же текста от 1964 г. он уточнил, что они представляют собой очень серьезную проблему, однако, не для *математики*, а скорее для логики и эпистемологии, т.е. *философии* [Gödel, 1990/1947, p. 180; 1990/1964, p. 258]. По сообщению Хао Вана, Гёдель считал появление парадоксов теории множеств «результатом недоразумения (are due to a misunderstanding)» [Wang, 1974, p. 187–188].

пом Дирихле»: «справляться с проблемами при помощи максимума зрячих мыслей и минимума слепых вычислений (mit einem Minimum an blinder Rechnung, einem Maximum an sehenden Gedanken die Probleme zu zwingen)» [Minkowski, 1905, S. 163]. С точки зрения Гильберта, в этом состояла основа тех великих достижений и той интеллектуальной свободы, которыми могла гордиться современная ему математика. Брауэр же, исходивший из весьма специфического мистического мировосприятия, предлагал «обрезать крылья» математической мысли, ограничив ее исключительно конструктивными процедурами. В обскурантизме позиции Брауэра Гильберт усмотрел реальную угрозу ценнейшим завоеваниям современной математики.

Если посмотреть на ситуацию того времени шире, нетрудно заметить, что основная проблема состояла в том, что беспрецедентный для истории математики взрывной рост, выводящий на сцену новые высоко абстрактные теории, явно обгонял куда более консервативную и медленно меняющуюся философию математики, которая не поспевала отслеживать изменения в самой математике. Эта новая математика обрела невиданную прежде автономию, как по отношению к физике, так и по отношению к теологии. Не получая более ощутимой поддержки ни от первой, ни от второй, она как бы оказалась «висящей в воздухе». Именно это и было подлинной причиной неуверенности и кризисного сознания, а также болезненной одержимости проблемой обоснования, по крайней мере в среде математиков наиболее чувствительных к такого рода вопросам. Речь идет об уникальной констелляции, определявшей положение математики в конце XIX – начале XX в. Для того чтобы переносить интеллектуальные беспокойства и заботы того времени на другие эпохи, требуются достаточно веские основания. Такой перенос не может быть чем-то автоматическим и само собой разумеющимся. Хотелось бы обратить внимание: сказанное в настоящей статье ни в коей мере не подразумевает, что в развитии математики не бывает кризисов или не происходит революций, как раз наоборот. Однако за сходствами хотелось бы не упустить различий. Без должного внимания к этим различиям, математика не может быть увидена как культурно-воплощенная, укорененная в человеческой истории, т.е. *историчная* в подлинном смысле этого слова.

Благодарности. Я особо признателен Марчину Трепчинскому, Зинаиде Александровне Сокулер и Евгению Алексеевичу Зайцеву, а также участникам Московского семинара по философии математики, без чьей поддержки и критики эта статья не могла быть написана.

Список литературы

Бен-Дэвид, 2014/1971 – *Бен-Дэвид Дж.* Роль ученого в обществе / Пер. с англ. А. Смирнова. М.: НЛО, 2014. 344 с.

Беркли, 1978/1734 – *Беркли Дж.* Аналитик, или Рассуждение, адресованное неверующему математику / Пер. с англ. Е.С. Лагутина // *Беркли Дж.* Сочинения. М.: Мысль, 1978. С. 395–442.

Даламбер, 1994/1751 – [*Даламбер Ж.Л.*] Предварительное рассуждение издателей / Пер. с фр. И.А. Шапиро // Философия в «Энциклопедии» Дидро и Даламбера / Отв. ред. В.М. Богуславский. М.: Наука, 1994. С. 55–121.

Дидро, 1986 – *Дидро Д.* Сочинения: в 2 т. М.: Мысль, 1986. Т. 1. 592 с.

Сокулер, 2001 – *Сокулер З.А.* Знание и власть: наука в обществе модерна. СПб.: РХГИ, 2001. 240 с.

Эйлер, 1949/1755 – *Эйлер Л.* Дифференциальное исчисление / Пер. с лат. М.Я. Выгодского. М.; Л.: ГИТТЛ, 1949. 580 с.

Belhoste, 2014 – *Belhoste B.* When an Academician Becomes Professor: the Case of Joseph-Louis Lagrange // Lettera Matematica, International Edition. 2014. Vol. 2. No. 1–2. P. 25–34.

Berkeley, 1992/1734 – *Berkeley G.* The Analyst [1734] // *Berkeley G.* “De Motu” and “The Analyst”: A Modern Edition, with Introductions and Commentary / Ed. and tr. by D.M. Jesseph. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1992. P. 158–221.

Bottazzini, 1986/1981 – Bottazzini U. The Higher Calculus: A History of Real and Complex Analysis from Euler to Weierstrass / Trans. by W. Van Egmond. New York: Springer-Verlag, 1986. 332 p.

Boyer, 1959 – *Boyer C.B.* The History of the Calculus and Its Conceptual Development. N.Y.: Dover Publications, 1959. 360 p.

Carnot, 1803 – *Carnot L.N.M.* Géométrie de position. P.: Duprat, 1803. 529 p.

Cohen, 2007 – *Cohen D.J.* Equations from God: Pure Mathematics and Victorian Faith. Baltimore, MD: The Johns Hopkins University Press, 2007. 254 p.

Comte, 1934/1830 – *Comte A.* Cours de philosophie positive. T. I [1830]. 6 éd. P.: Alfred Costes, 1934. 430 p.

Dahmen, 2015 – *Dahmen S.R.* On Pendulums and Air Resistance: The Mathematics and Physics of Denis Diderot // The European Physical Journal H. 2015. Vol. 40. No. 3. P. 337–373.

D'Alembert, 1995/1751 – *D’Alembert J.-B. le R.* Preliminary Discourse to the Encyclopedia of Diderot / Tr. by R.N. Schwab. Chicago: University of Chicago Press, 1995. 224 p.

Daston, 1988 – *Daston L.J.* Fitting Numbers to the World: The Case of Probability Theory // History and Philosophy of Modern Mathematics / Ed. by W. Aspray, P. Kitcher. Minneapolis, MN: University of Minnesota Press, 1988. P. 221–237.

Diderot, 1875/1761 – *Diderot D.* Sur les probabilités [1761] // Œuvres complètes de Diderot / Éd. J. Assézat et M. Tourneux. T. IX. P.: Garnier, 1875. P. 192–206.

Diderot, D’Alembert, 1751 – Encyclopédie, ou dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers, par une société de gens de lettres / Ed. by D. Diderot, J.-B. le R. D’Alembert. Tome premier. Paris, 1751. 972 p.

Euler, 2000/1755 – *Euler L.* Foundations of Differential Calculus / Tr. by J.D. Blanton. N.Y.: Springer-Verlag, 2000. 210 p.

Ferreirós, 2007 – *Ferreirós J.* Ὁ Θεὸς Ἀριθμητίζει: The Rise of Pure Mathematics as Arithmetic with Gauss // The Shaping of Arithmetic after C.F. Gauss’s “Disquisitiones Arithmeticae” / Ed. by C. Goldstein, N. Schappacher and J. Schwermer. Berlin: Springer-Verlag, 2007. P. 235–268.

Ferreirós, 2008 – *Ferreirós J.* The Crisis in the Foundations of Mathematics // The Princeton Companion to Mathematics / Ed. by T. Gowers. Princeton: Princeton University Press, 2008. P. 142–156.

Ferreirós, 2016 – *Ferreirós J.* Purity as a Value in the German-Speaking Area // Mathematical Cultures: The London Meetings 2012–2014 / Ed. by B. Larvor. Birkhäuser, 2016. P. 215–234.

Fraenkel, Bar-Hillel, 1958 – *Fraenkel A., Bar-Hillel Y.* Foundations of Set Theory. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1958. 425 p.

Gödel, 1990/1947 – *Gödel K.* What is Cantor’s Continuum Problem? [1947] // *Gödel K.* Collected Works / Ed. by S. Feferman. Vol. II: Publications 1938–1974. N.Y.: Oxford University Press, 1990. P. 176–187.

Gödel, 1990/1964 – *Gödel K.* What is Cantor’s Continuum Problem? [1964] // *Gödel K.* Collected Works / Ed. by S. Feferman. Vol. II: Publications 1938–1974. N.Y.: Oxford University Press, 1990. P. 254–270.

Gray, 1992 – *Gray J.* The Nineteenth-Century Revolution in Mathematical Ontology // Revolutions in Mathematics / Ed. by D. Gillies. Oxford: Clarendon Press, 1992. P. 226–248.

Gray, 2004 – *Gray J.* Anxiety and Abstraction in Nineteenth-Century Mathematics // Science in Context. 2004. Vol. 17. No. 1/2. P. 23–47.

Guicciardini, 1989 – *Guicciardini N.* The Development of Newtonian Calculus in Britain 1700–1800. Cambridge: Cambridge University Press, 1989. 240 p.

Hahn, 1971 – *Hahn R.* The Anatomy of a Scientific Institution: The Paris Academy of Sciences, 1666-1803. Berkeley; Los Angeles: University of California Press, 1971. 447 p.

Heard, 2019 – *Heard J.* From Servant to Queen: A Journey through Victorian Mathematics. Cambridge: Cambridge University Press, 2019. 278 p.

Jahnke, 1990 – *Jahnke H.N.* Mathematik und Bildung in der Humboldtschen Reform. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht, 1990. 504 S.

Kovač, 2008 – *Kovač S.* Gödel, Kant, and the Path of a Science // Inquiry. 2008. Vol. 51. No. 2. P. 147–169.

Krakeur, Krueger, 1941 – *Krakeur L.G., Krueger R.L.* The Mathematical Writings of Diderot // Isis. 1941. Vol. 33. No. 2. P. 219–232.

Kuhn, 1977 – *Kuhn T.S.* The Essential Tension: Selected Studies in Scientific Tradition and Change. Chicago: The University of Chicago Press, 1977. 390 p.

Minkowski, 1905 – *Minkowski H.* Peter Gustav Lejeune Dirichlet und seine Bedeutung für die heutige Mathematik // Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. 1905. Bd. 14. S. 149–163.

Pickering, 2007 – *Pickering M.* Auguste Comte and the Académie des Sciences // Revue philosophique de la France et de l'étranger. 2007. Vol. 132. No. 4. P. 437–450.

Potter, 2004 – *Potter M.* Set Theory and Its Philosophy. N.Y.: Oxford University Press, 2004. 359 p.

Pyenson, 1983 – *Pyenson L.* Neohumanism and the Persistence of Pure Mathematics in Wilhelmian Germany. Philadelphia: American Philosophical Society, 1983. 136 p.

Shaposhnikov, 2014 – *Shaposhnikov V.A.* The Applicability Problem and a Naturalistic Perspective on Mathematics // Philosophy, Mathematics, Linguistics: Aspects of Interaction. Proceedings of the International Scientific Conference: St. Petersburg, April 21–25, 2014 / Ed. by G. Mints, O.B. Prosorov. St. Petersburg: Euler International Mathematical Institute, 2014. P. 185–197.

Shaposhnikov, 2016a – *Shaposhnikov V.A.* Theological Underpinnings of the Modern Philosophy of Mathematics. Part I: Mathematics Absolutized // Studies in Logic, Grammar and Rhetoric. 2016. Vol. 44 (57). P. 31–54.

Shaposhnikov, 2016b – *Shaposhnikov V.A.* Theological Underpinnings of the Modern Philosophy of Mathematics. Part II: The Quest for Autonomous Foundations // Studies in Logic, Grammar and Rhetoric. 2016. Vol. 44 (57). P. 147–168.

von Waltershausen, 1856 – *von Waltershausen S.* Gauss: zum Gedächtnis. Leipzig: Verlag von S. Hirzel, 1856. 108 S.

Wang, 1974 – *Wang H.* From Mathematics to Philosophy. L.: Routledge & Kegan Paul, 1974. 442 p.

Wittgenstein, 2005/1933-37 – *Wittgenstein L.* The Big Typescript TS 213 [1933–37] / Ed. and tr. by C.G. Luckhardt, M.A.E. Aue. Oxford: Blackwell Publishing, 2005. 1040 p.

Wittgenstein, 1976/1939 – Wittgenstein's Lectures on the Foundations of Mathematics, Cambridge, 1939 / Ed. by C. Diamond. Hassocks: The Harvester Press, 1976. 301 p.

Zakai, 2007 – *Zakai A.* The Rise of Modern Science and the Decline of Theology as the "Queen of Sciences" in the Early Modern Era // Reformation & Renaissance Review. 2007. Vol. 9. No. 2. P. 125–151.

The myth of the three crises in foundations of mathematics Part 2

Vladislav A. Shaposhnikov

Lomonosov Moscow State University. 27 Lomonosovsky Prospekt, bldg. 4, GSP-1, Moscow, 119991, Russian Federation; e-mail: shaposhnikov@philos.msu.ru

The story of "the three crises in foundations of mathematics" is widely popular in Russian publications on the philosophy of mathematics. This paper aims at evaluating this story against the background of the contemporary scholarship in the history of mathematics. The conclusion is that it should be considered as a specimen of modern myth-making activity brought to the fore by an unconscious tendency to model the whole history of mathematics on the pattern of the foundational crisis of the first decades of the 20th century. What is more, the consideration of the specific role and character of the foundations in both early Greek mathematics and 18th-century mathematics gives an occasion to raise a more general question regarding the true meaning of the historicity of mathematics. In the first part of this paper, it has been demonstrated that there is no evidence to recognize the so-called "first foundational crisis" in pre-Euclidean Greek mathematics caused by the discovery of incommensurable magnitudes. The second part is mainly devoted to the historical situation of the 18th century and the beginning of the 19th century, the alleged epoch of "the second foundational crisis" caused by the obscurity of the basic notions of the calculus. Despite the lack of clarity as far as the foundations of mathematical analysis are concerned, there are no signs of a foundational crisis in 18th-century mathematics. On the contrary, in the 19th century, at the time of "the second scientific revolution", there are striking illustrations of crisis awareness. The cultural processes that engendered this awareness are shown to be identical for the 19th century and the beginning of the 20th century, hence the second and the third foundational crises are proved to be the different stages of the same unique crisis. Finally, we have only one foundational crisis instead of three.

Keywords: philosophy of mathematics, foundations of mathematics, relationship between mathematics and physics, mathematics and theology, foundational crisis, historicity

References

Belhoste, B. "When an Academician Becomes Professor: the Case of Joseph-Louis Lagrange", *Lettera Matematica, International Edition*, 2014, vol. 2, no. 1–2, pp. 25–34.

Ben-David, J. *Rol' uchenogo v obshchestve* [The Scientist's Role in Society], trans. by A.Smirnov. Moscow: New Literary Observer Publ., 2014. 344 pp. (In Russian)

Berkeley, G. "Analitik, ili Rassuzhdenie, adresovannoe neveruyushchemu matematiku" [The Analyst or a Discourse Addressed to an Infidel Mathematician], trans. by E.S. Lagutin, in Berkeley G. [Selected Works]. Moscow: Mysl Publ., 1978, pp. 395–442. (In Russian)

Berkeley, G. "The Analyst," in: Berkeley, G. *De Motu and The Analyst: A Modern Edition, with Introductions and Commentary*, ed. and trans. by D.M. Jesseph. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1992, pp. 158–221.

Bottazzini, U. *The Higher Calculus: A History of Real and Complex Analysis from Euler to Weierstrass*, trans. by W. Van Egmond. New York: Springer-Verlag, 1986. 332 pp.

Boyer, C.B. *The History of the Calculus and Its Conceptual Development*. New York: Dover Publications, 1959. 360 pp.

Carnot, L.N.M. *Géométrie de position*. Paris: Duprat, 1803. 529 pp.

Cohen, D.J. *Equations from God: Pure Mathematics and Victorian Faith*. Baltimore, MD: The Johns Hopkins University Press, 2007. 254 pp.

Comte, A. *Cours de philosophie positive*, T. I [1830], 6 éd. Paris: Alfred Costes, 1934. 430 pp.

Dahmen, S.R. "On Pendulums and Air Resistance: The Mathematics and Physics of Denis Diderot", *The European Physical Journal H*, 2015, vol. 40, no. 3, pp. 337–373.

D'Alembert, J.-B. le R. "Predvaritel'noe rassuzhdenie izdateley" [Preliminary Discourse], trans. by I.A. Shapiro, in: *Filosofiya v "Entsiklopedii" Didro i Dalambera* [Philosophy in the Encyclopedia of Diderot and D'Alambert], ed. by V.M. Boguslavsky. Moscow: Nauka Publ., 1994. P. 55–121. (In Russian)

D'Alembert, J.-B. le R. *Preliminary Discourse to the Encyclopedia of Diderot*, trans. by R.N. Schwab. Chicago: University of Chicago Press, 1995. 224 pp.

Daston, L.J. "Fitting Numbers to the World: The Case of Probability Theory", in: *History and Philosophy of Modern Mathematics*, ed. by W. Aspray and P. Kitcher. Minneapolis, MN: University of Minnesota Press, 1988, pp. 221–237.

Diderot, D. *Sochineniya v 2-kh tomakh* [Selected Works in 2 Vol.], vol. 1. Moscow: Mysl Publ., 1986. 592 pp. (In Russian)

Diderot, D. "Sur les probabilités [1761]", Œuvres complètes de Diderot, éd. J. Assézat et M. Tourneux, T. IX. Paris: Garnier, 1875, pp. 192–206.

Euler, L. *Differentsial'noe ischislenie* [Differential Calculus], trans. by M.Ya. Vygodsky. Moscow – Leningrad: State Techno-Theoretical Literature Publ., 1949. 580 pp. (In Russian)

Diderot, D., D'Alembert, J.-B. le R. (eds.) *Encyclopédie, ou dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers, par une société de gens de lettres. Tome premier*. Paris, 1751. 972 pp.

Euler, L. *Foundations of Differential Calculus*, trans. by J.D. Blanton. New York: Springer-Verlag, 2000. 210 pp.

Ferreirós, J. "Ὁ Θεὸς Ἀριθμητίζει: The Rise of Pure Mathematics as Arithmetic with Gauss", in: *The Shaping of Arithmetic after C.F. Gauss's "Disquisitiones Arithmeticae"*, ed. by C. Goldstein, N. Schappacher and J. Schwermer. Berlin: Springer-Verlag, 2007, pp. 235–268.

Ferreirós, J. "The Crisis in the Foundations of Mathematics", in: *The Princeton Companion to Mathematics*, ed. by T. Gowers. Princeton: Princeton University Press, 2008, pp. 142–156.

Ferreirós, J. "Purity as a Value in the German-Speaking Area", in: *Mathematical Cultures: The London Meetings 2012–2014*, ed. by B. Larvor. Birkhäuser, 2016, pp. 215–234.

Fraenkel, A., Bar-Hillel, Y. *Foundations of Set Theory*. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1958. 425 pp.

Gödel, K. "What is Cantor's Continuum Problem? [1947]", in Gödel, K. *Collected Works, ed. by S. Feferman, Vol. II: Publications 1938–1974*. New York: Oxford University Press, 1990, pp. 176–187.

Gödel, K. "What is Cantor's Continuum Problem? [1964]", in Gödel, K. *Collected Works, ed. by S. Feferman, Vol. II: Publications 1938–1974*. New York: Oxford University Press, 1990, pp. 254–270.

Gray, J. "The Nineteenth-Century Revolution in Mathematical Ontology", in: *Revolutions in Mathematics*, ed. by D. Gillies. Oxford: Clarendon Press, 1992, pp. 226–248.

Gray, J. "Anxiety and Abstraction in Nineteenth-Century Mathematics", *Science in Context*, 2004, vol. 17, no. 1/2, pp. 23–47.

Guicciardini, N. *The Development of Newtonian Calculus in Britain 1700–1800*. Cambridge: Cambridge University Press, 1989. 240 pp.

Hahn, R. *The Anatomy of a Scientific Institution: The Paris Academy of Sciences, 1666–1803*. Berkeley; Los Angeles: University of California Press, 1971. 447 pp.

Heard, J. *From Servant to Queen: A Journey through Victorian Mathematics*. Cambridge: Cambridge University Press, 2019. 278 pp.

Jahnke, H.N. *Mathematik und Bildung in der Humboldtschen Reform*. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht, 1990. 504 S.

Kovač, S. "Gödel, Kant, and the Path of a Science", *Inquiry*, 2008, vol. 51, no. 2, pp. 147–169.

Krakeur, L.G., Krueger, R.L. "The Mathematical Writings of Diderot", *Isis*, 1941, vol. 33, no. 2, pp. 219–232.

Kuhn, T.S. *The Essential Tension: Selected Studies in Scientific Tradition and Change*. Chicago: The University of Chicago Press, 1977. 390 pp.

Minkowski, H. "Peter Gustav Lejeune Dirichlet und seine Bedeutung für die heutige Mathematik", *Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 1905, Bd. 14, S. 149–163.

Pickering, M. "Auguste Comte and the Académie des Sciences", *Revue philosophique de la France et de l'étranger,* 2007, vol. 132, no. 4, pp. 437–450.

Potter, M. *Set Theory and Its Philosophy*. New York: Oxford University Press, 2004. 359 pp.

Pyenson, L. *Neohumanism and the Persistence of Pure Mathematics in Wilhelmian Germany*. Philadelphia: American Philosophical Society, 1983. 136 pp.

Shaposhnikov, V.A. "The Applicability Problem and a Naturalistic Perspective on Mathematics", in: *Philosophy, Mathematics, Linguistics: Aspects of Interaction. Proceedings of the International Scientific Conference: St. Petersburg, April 21–25, 2014*, ed. by G. Mints and O.B. Prosorov. St. Petersburg: Euler International Mathematical Institute, 2014, pp. 185–197.

Shaposhnikov, V.A. "Theological Underpinnings of the Modern Philosophy of Mathematics. Part I: Mathematics Absolutized", *Studies in Logic, Grammar and Rhetoric*, 2016, vol. 44 (57), pp. 31–54.

Shaposhnikov, V.A. "Theological Underpinnings of the Modern Philosophy of Mathematics. Part II: The Quest for Autonomous Foundations," *Studies in Logic, Grammar and Rhetoric*, 2016, vol. 44 (57), pp. 147–168.

Sokuler, Z.A. *Znanie i vlast': nauka v obshchestve moderna* [Knowledge and Power: Science in the Society of the Modernity]. St. Petersburg: Russian Christian Institute for the Humanities Publ., 2001. 240 pp. (In Russian)

von Waltershausen, S. *Gauss: zum Gedächtnis*. Leipzig: Verlag von S. Hirzel, 1856. 108 S.

Wang, H. *From Mathematics to Philosophy*. London: Routledge & Kegan Paul, 1974. 442 pp.

Wittgenstein, L. *The Big Typescript TS 213* [1933–37], ed. and trans. by C.G. Luckhardt and M.A.E. Aue. Oxford: Blackwell Publishing, 2005. 1040 pp.

Wittgenstein's Lectures on the Foundations of Mathematics, Cambridge, 1939, ed. by C. Diamond. Hassocks: The Harvester Press, 1976. 301 pp.

Zakai, A. "The Rise of Modern Science and the Decline of Theology as the 'Queen of Sciences' in the Early Modern Era", *Reformation & Renaissance Review*, 2007, vol. 9, no. 2, pp. 125–151.